

Modelo de controle ótimo para empresas do polo industrial de Manaus

Resumo: Esse trabalho visou elaborar um modelo matemático capaz de verificar se o capital das empresas consegue controlar o nível de emprego do Polo Industrial de Manaus (PIM) e, teoricamente, manter ótimo o lucro de longo prazo. A modelagem matemática foi desenvolvida através da Teoria do Controle Ótimo cuja função objetivo é composta pela curva de produção Cobb-Douglas e pela função linear, representando o lucro das firmas. Como resultado, as trajetórias temporais encontram-se com níveis ótimos, acompanhadas por variações no elemento de controle até o restabelecimento da eficácia dos fatores e da otimalidade global dos lucros, ratificando a teoria econômica. Finalmente, este trabalho mostra que a modelagem de conceitos econômicos, com o uso da Teoria do Controle Ótimo, resulta na melhor resposta à dinâmica dos insumos, trabalho e capital, num cenário de desequilíbrio das firmas, assegurando a melhor decisão por patamares praticados e, principalmente, pela melhor trajetória dos fatores.

Palavras-chave: Modelagem matemática; Lucro de longo prazo; Princípio do Máximo de Pontryagin; Trajetória ótima.

Abstract: *This paper elaborated a theoretical mathematical model that verifies if the capital of the companies can control the employment level of the Industrial Pole of Manaus and maintain long-term profit at optimal levels. We use the mathematical Optimal Control Theory whose objective function is composed of the Cobb-Douglas production curve and the linear function, representing the firms' profit. As a result, the time trajectories are at optimal levels, accompanied by variations in the control element until the reestablishment of the effectiveness of the factors and the global optimality of profits, confirming the economic theory. Finally, this work shows that the modeling of economic concepts, using the Theory of Optimal Control, results in the best response to the dynamics of inputs, labor and capital, in a scenario of imbalance of firms, ensuring the best decision by levels practiced and, mainly due to the better trajectory of the factors.*

Keywords: *Mathematical modeling; Long-term profit; Pontryagin Maximum Principle; Optimal trajectory.*

Classificação JEL: C02; D24; E24.

Aylo Sousa Nascimento Filho¹

Frederick Fagundes Alves²

¹ Universidade Federal do Amazonas (UFAM).
E-mail: aylo.nascimento@hotmail.com

² Universidade Federal do Amazonas (UFAM).
E-mail: frederick@ufam.edu.br
Endereço: Av. General Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 3.000 – Coroado. Campus Universitário, Setor Norte, Bloco da FES. CEP: 69077-000 – Manaus/AM

1.Introdução

Este trabalho apresenta um modelo de controle ótimo para os níveis de emprego e investimento de empresas do Polo Industrial de Manaus (PIM) com intuito de maximizar o lucro e identificar as melhores trajetórias temporais para esses fatores. Com a pesquisa teórica da variação dos insumos, tem-se a pretensão de responder quais as condições para que isso ocorra, uma vez percebida a necessidade de otimização dos níveis praticados no modelo citado. Não obstante, a relação do emprego com o capital no Polo Industrial de Manaus, no campo da teoria econômica revisada, aponta para a necessidade de assumir as premissas econômicas, de Controle e Proporcionalidade, como hipóteses matemáticas colocadas diante da problemática clássica da otimização dos lucros. Desta forma, foram associados elementos econômicos a um problema de controle restrito à evolução proporcional de suas variáveis que representa a decisão das firmas do PIM em relação aos insumos.

A restrição ao sistema dinâmico é a equação diferencial que representa o comportamento aproximado das variáveis ou dos níveis físicos. Consequentemente, a função objetivo e a restrição são autônomas, não dependem explicitamente do tempo, embora as quantidades demandadas dos insumos dependam. Neste caso, a aplicação de condições necessárias de primeira ordem e de condições iniciais encontram trajetórias ótimas e controláveis para os insumos. Portanto, o modelo resolve um problema cuja função objetivo é composta pela função de produção Cobb-Douglas e a função linear, restrito à dinâmica sugerida a partir da análise dos índices do Modelo de Zona Franca e, mais precisamente, de seu eixo estruturante, o Polo Industrial de Manaus.

Não existe um consenso entre os especialistas dos benefícios reais do modelo de desenvolvimento da Zona Franca de Manaus à sociedade. Em relação à distribuição de renda, por exemplo, os estudos indicam crescimento econômico com aumento do produto e do nível de emprego associados a desigualdade sistêmica e comparada, na segunda e na terceira fase da dinâmica evolutiva do modelo (OLIVEIRA *et al.*, 2012, p. 15; BISPO, 2009, p. 211), respectivamente.

Estudos da Demonstração de Valor Adicionado mostram que as empresas do polo agregaram mais valor que empresas pares brasileiras (SÁ *et al.*, 2013) em um período de tempo, em parte, coincidente com o aumento do crescimento do Produto Interno Bruto (PIB) e do nível de emprego formal (ROCHA *et al.*, 2013), ratificando a mudança da função de produção e a modernização sem precedentes no polo industrial que culminou em melhorias nas condições de emprego, e num salto na produtividade com níveis crescente de investimento (MACHADO *et al.*, 2006).

O estudo da relação entre os investimentos produtivos líquidos, ou seja, da variação no estoque de capital de empresas do PIM e a média mensal de mão de obra, a variação no estoque de emprego, no período entre os anos de 2000 a 2010, procura medir a intensidade da associação linear entre esses dois indicadores. Não obstante, como contribuição, a compreensão do modelo e seu impacto socioeconômico esse estudo apresenta um modelo teórico com premissas econômicas de Controle e Proporcionalidade como sugestão ao possível desajuste entre os estoques desses insumos ao longo do tempo.

A análise do comportamento matemático do Polo Industrial de Manaus dentro do modelo de desenvolvimento da Zona Franca e, principalmente, da relação entre os índices de investimento e de mão de obra, podem melhorar a compreensão sobre a criação e a manutenção de postos de trabalho na região. O PIM sofreu mudanças jurídico-administrativas e de organização industrial desde sua criação até a atualidade; em parte devido a política de redirecionamento dos objetivos econômicos, apresentando dificuldade em manter o nível de emprego diante de flutuações do produto que pode

ser verificada por críticas como em Guerra (1995), Ariffin e Figueiredo (2003), Silva (2006), Bispo (2009), Miranda (2013), dentre outros. Desta forma, surgem indagações sobre os padrões evolutivos das variáveis estudadas levando em consideração a fase do modelo econômico e a instabilidade dos níveis ou dos estoques dos fatores. O que converge para a situação problema: Pode-se controlar o nível de emprego do Polo Industrial de Manaus através do nível de capital utilizado?

A resposta para esta pergunta desencadeia uma série de investigações sobre essas variáveis, sobre os indicadores e seus impactos no lucro empresarial. O que pode ser representado por um problema de otimização dinâmica em que as funções objetivo e de restrição descrevem ou tentam descrever o comportamento do modelo econômico em questão. Para isso, faz-se necessário a formalização das hipóteses a serem avaliadas.

A primeira hipótese é que o capital controla o emprego das empresas do PIM. Essa hipótese é fundamental para a escolha da teoria matemática a ser utilizada no trabalho, a Teoria do Controle Ótimo. Pretende-se, portanto, otimizar a função de lucro das empresas ao longo do tempo através da influência da variável de controle, o capital, sobre a variável de estado, o trabalho, de maneira que a função Hamiltoniana construída pela função de lucro e a função de restrição durante a resolução atinja seu ótimo em relação à primeira variável. Logo, está implícita a condição de otimalidade dos lucros na premissa do modelo da qual o capital exerce controle sobre o trabalho e esse, por sua vez, meça o estado geral do sistema.

A segunda hipótese é que os fatores sejam proporcionais ao longo do tempo. Essa suposição econômica é simplificadora uma vez que problemas autônomos são de difícil resolução analítica, além de assumir a existência de um “vínculo” entre as variáveis que possivelmente influenciará nas trajetórias ótimas procuradas. Esta premissa corresponde a restrição à função objetivo e deve ser remodelada para que se contorne outra dificuldade, a de trabalhar com equações diferenciais de segunda ordem, visto que não é imperativo mudanças de variáveis nas equações empregadas.

Portanto, o objetivo principal desse trabalho é construir um modelo, a partir de hipóteses matemáticas no tocante à Teoria do Controle Ótimo, e verificar se este pode melhorar o desempenho dos níveis de emprego e capital do Polo Industrial de Manaus através de trajetórias que otimizem o lucro empresarial e a demanda desses fatores ao longo do tempo.

Os resultados mais proeminentes são os caminhos ótimos das variáveis de estado e de controle, bem como a relação linear entre as Produtividades Marginais dos insumos, obtida a partir da análise da função Hamiltoniana. Ou seja, reuniu-se neste trabalho as condições necessárias para que capital e emprego tenham trajetórias razoáveis e otimizem a função de lucro baseado no comportamento restritivo dos fatores no modelo econômico regional.

2. Referencial teórico

2.1 Modelagem matemática

A modelagem matemática é um processo que tem como objetivo a simplificação de um problema real através da resolução de um problema abstrato que circunscreve a realidade a partir de observações e interpretações já existentes. Ou seja,

O objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista

como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2002, p.13)

Essa é uma forma simples de descrever as ações mais importantes no processo de modelagem matemática. Porém, as etapas mais detalhadas para a obtenção de um modelo cogitativo que possa responder a um aspecto isolado da realidade são, segundo Bassanezi *op. cit.* (2002):

1. Experimentação. Nessa etapa o modelador expande sua compreensão sobre o problema concreto e junta uma gama de informações sobre o histórico de abordagens e pontos de vista diferentes sobre o objeto.
2. Abstração. Esta necessita de subtarefas como: A seleção das variáveis, limitação dos aspectos estudados e a preparação para a apresentação das equações ou funções matemáticas relacionadas; A formulação dos problemas teóricos, a descrição do problema no contexto da teoria estudada; A formulação de hipóteses, deduções lógicas sobre o funcionamento interno; e A simplificação, a retirada de entraves ao entendimento e a resolução do problema.
3. Resolução. Como o próprio nome sugere é a aplicação do método de resolução ao problema matemático abstrato.
4. Validação. A interpretação dos resultados matemáticos a partir da aplicação de métodos de resolução.
5. Modificação. Ajustes em relação ao problema original.

Finalmente, a modelagem representa uma tentativa de reduzir a complexidade de problemas reais e, quando possível, aplicar teorias relacionadas, não apenas para descrever fenômenos mais pra prever e melhorar das decisões sobre o objeto em estudo.

2.2 A relação econômica do capital com o trabalho

Existe uma infinidade de teorias e modelos econômicos que estudam a relação entre os fatores de produção, trabalho e capital. Na abordagem clássica, a Teoria de Desenvolvimento de David Ricardo contribuiu com a equação de Demanda por Trabalho, aqui utilizada como restrição ao problema matemático. Outra abordagem à não clássica, denominada Keynesiana, é um contraponto a primeira que foi a resposta técnica aos desequilíbrios ocorridos na economia mundial após a crise de 1929.

Na abordagem clássica, David Ricardo (1777-1823) encontrou um problema lógico na Teoria do Valor-Trabalho; se o valor do produto incorporasse somente o valor do trabalho, o capital migraria pela indústria gerando lucros desiguais para o mesmo volume de emprego, com exceção do capital fixo porque Ricardo imaginava o capital variável como a fonte do valor-trabalho. E ainda, se houvesse igualdade na troca dos insumos haveria concentração de atividades num fator apenas (BRUE, 2004). Para resolver o impasse, considerou que a substituição ao longo do tempo fosse de forma proporcional, mas não unitária, e privilegiou o trabalho como a origem do valor de troca. O capital coincidiria, portanto, ao trabalho incorporado ao longo do tempo. Neste sentido, chegou-se à forma da dinâmica de crescimento no fluxo diferente dos insumos. A partir dessas conclusões os economistas ampliaram as discussões em relação a essas variáveis elevando-as a uma Teoria do Crescimento e da Distribuição de Renda. Importante perceber que a incorporação do trabalho foi a forma encontrada para superar a dificuldade em distinguir os dois fatores. Infelizmente, esse estratagemas ocasionou outras dificuldades (MORSELEY, 2012); por exemplo, problemas conceituais com a Agregação devido as diferentes categorias de trabalho e capital e, com a produtividade marginal do capital devido a impossibilidade de se manter as matérias-primas constantes

enquanto a produção aumenta.

Em Oreiro (2000), pode-se observar toda a evolução do argumento clássico. Ainda na Teoria Clássica do Crescimento, não se pode garantir que o fator trabalho seja utilizado de forma plena, ao contrário do fator capital, uma vez que a indústria atua no pleno uso de sua capacidade produtiva, ou seja, do capital fixo. O resultado do confronto entre as produtividades dos fatores é uma igualdade entre a variável de emprego e a variável de capital multiplicada pela razão entre as quantidades dos fatores à margem. Manipulações matemáticas dessa equação encontram a igualdade entre a taxa de crescimento da demanda por trabalho e a taxa de crescimento do estoque de capital sugerindo que a Equação de Demanda por Trabalho de Ricardo (SOUZA, 2005) seja uma adaptação desse resultado. Além disso, a teoria enfrenta o óbice encontrado a partir da comparação da fronteira de lucro-salário e da fronteira de consumo-crescimento, considera-se o salário de subsistência igual ao consumo e a produtividade marginal do trabalho como uma função exponencial do capital, o que redireciona a questão aos retornos de escala. Neste sentido, a solução do problema é que os retornos de escalas sejam constantes e, para isso, a igualdade entre as taxas acima deve prevalecer.

Na abordagem mais recente, a teoria keynesiana, o movimento do capital em relação ao trabalho é quase imediato, pois uma taxa de desemprego alta resulta num produto agregado baixo em períodos de tempo consecutivos; por se tratar de um volume de mão-de-obra que não produz hoje e, conseqüentemente, não agregará amanhã com suas atividades. É evidente que isso depende do período dos contratos e da conjuntura econômica, em última instância. Essa queda na agregação afeta os níveis de capital que dependem diretamente da diferença entre os investimentos líquidos e a depreciação do capital naquele período. Ou seja, mais detalhadamente, o lucro contém parte do investimento que deve ser reempregado na economia e que influencia na decisão pelo nível de emprego, em um intervalo de tempo igual ao tempo de resposta do agente ao novo nível de capital e/ou investimento.

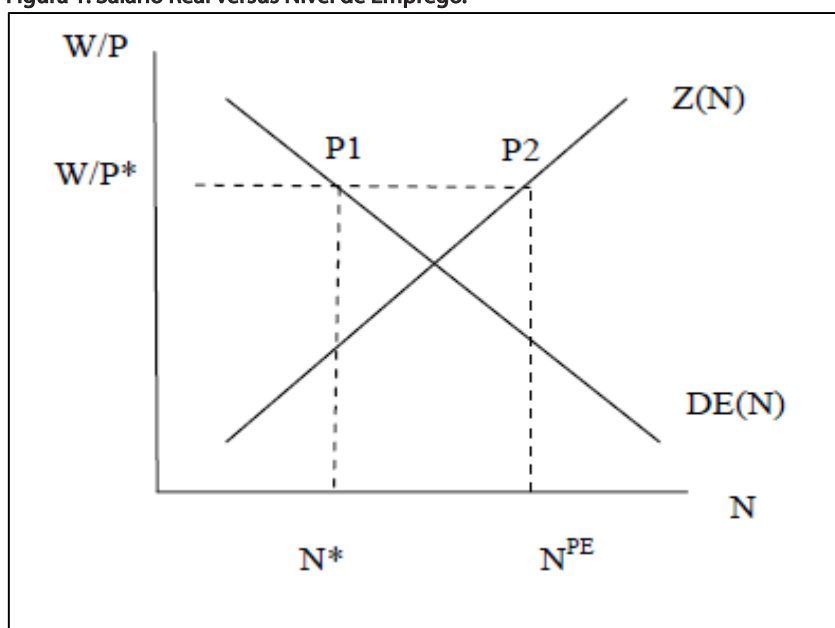
Como na interpretação keynesiana de equilíbrio:

Quando o emprego aumenta, aumenta, também, a renda real agregada. A psicologia da comunidade é tal que, quando a renda real da comunidade aumenta, o consumo agregado também aumenta, porém não tanto quanto a renda. Em consequência, os empresários sofreriam uma perda se o aumento total do emprego se destinasse a satisfazer a maior demanda para consumo imediato. Dessa maneira, para justificar qualquer volume de emprego, deve existir um volume de investimento suficiente para absorver o excesso da produção total sobre o que a comunidade deseja consumir quando o emprego se acha a determinado nível. A não ser que haja este volume de investimento, as receitas dos empresários serão menores que as necessárias para induzi-los a oferecer tal volume de emprego. Daqui se segue, portanto, que, dado o que chamaremos de propensão a consumir da comunidade, o nível de equilíbrio do emprego, isto é, o nível em que nada incita os empresários em conjunto a aumentar ou reduzir o emprego, dependerá do investimento corrente. O montante de investimento corrente dependerá, por sua vez, do que chamaremos de incentivo para investir, o qual, como se verificará, depende da relação entre a escala da eficiência marginal do capital e o complexo das taxas de juros que incidem sobre os empréstimos de prazos e riscos diversos. (KEYNES, 1970, p.31)

O investimento tem que cobrir a excedente do produtor para que o empresário seja desmotivado a interferir na mão-de-obra. Ou ainda, essas inversões dependem do volume de capital empregado e da taxa de lucros. A partir daí, a chave do problema é

a transição dos níveis de emprego da indústria para a firma, em conformidade, com a escala da eficiência marginal do capital (a taxa de lucro) e da taxa de juros do mercado. Essa característica é contemplada no modelo, de acordo, com o controle proporcional do capital sobre a demanda interna de emprego, num cenário em que o lucro se capitaliza a taxa nominal de juros. Encontrando seu limite no mercado de empréstimos, o patamar na taxa de juros do mercado condiz com desejo de maximização das rendas, futura e presente (OLIVEIRA, 2013). Notas técnicas do DIEESE – Departamento Intersindical de Estatísticas e Estudos Econômicos, instituto que subsidia pesquisas sobre mercado de trabalho, mostram o movimento coordenado do PIB e do estoque de emprego formal (DIEESE, 2012, 2014, 2014b). A dinâmica do produto coincide com o período de crescimento de emprego, mesmo para períodos de tempo mais significativos (ARMITRANO, 2013).

Figura 1: Salário Real versus Nível de Emprego.



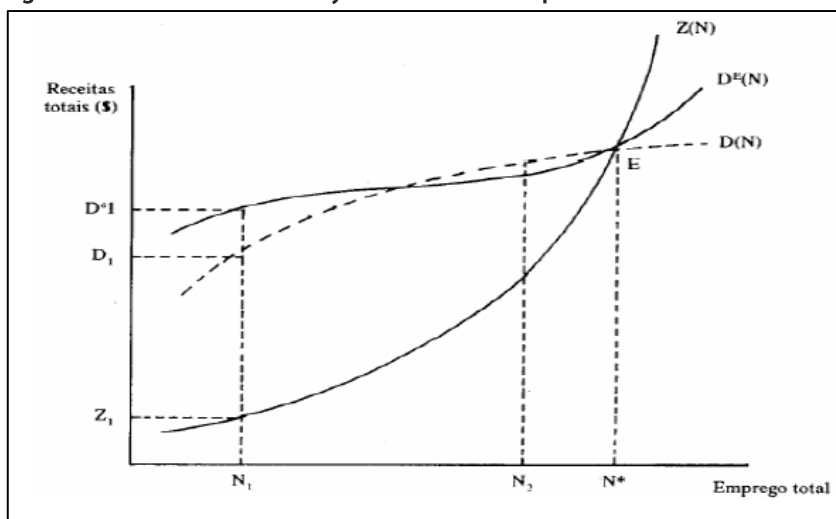
Fonte: (ROCHA, B. F. *et al*, 2013).

Logo, a primeira abordagem considera de maneira implícita a relação de proporcionalidade entre capital e trabalho, ao longo do tempo. E, ainda, auxilia noutro sentido, como o foco é a demanda agregada não realizada, a teoria tira do equilíbrio o pleno emprego e estabelece um equilíbrio com desemprego. Desta forma, os salários ficam determinados a partir dos movimentos da demanda efetiva, sugerindo a existência de vários níveis de emprego de equilíbrio, nos quais o empregador é desmotivado a interferir no nível de emprego. Como observa-se na Figura 1.

O nível de emprego de equilíbrio não está no encontro entre as curvas de oferta $Z(N)$ e de demanda $DE(N)$ por trabalho, deduz-se que o nível correspondente ao equilíbrio parcial N^* deve se ajustar, temporalmente, às expectativas de receitas das empresas para liquidez do salário real do estafe. Por exemplo, na Figura 1, o deslocamento do nível emprego do ponto P1 até o ponto de equilíbrio geral, na intersecção das retas, mostra que existe um intervalo de possibilidades de emprego antes que a empresa atinja o equilíbrio total. Com isso, Keynes criou uma teoria de crescimento com desemprego. Em consequência disso, o ponto de equilíbrio correspondente ao pleno emprego no ponto P2 estipula a oferta máxima de trabalhadores de uma sociedade levando em

consideração o crescimento populacional. As variações temporais entre as expectativas dos agentes figuram neste mesmo intervalo, ou seja, correspondem a parte esquerda da Figura 2.

Figura 2: Mercado de trabalho keynesiano e as suas expectativas.



Fonte: OREIRO e MISSIO (2006).

As curvas $Z(N)$ e $D(N)$ são curvas de oferta e demanda por emprego e $D^E(N)$, a receita esperada. Logo, ao longo do tempo o lucro, geometricamente, igual a distância dos pontos de ambas as curvas, diminui até desaparecer no ponto de equilíbrio. O que poderia sugerir a escolha por um crescimento positivo da função lucro. Neste caso, os juros são atribuídos, exclusivamente, a valorização ou desvalorização em regime de empréstimos. Decorre que uma elevação no estoque de capital reflete as expectativas por ajustes mais eficazes do nível de emprego que otimize a curva dos lucros.

Pode-se afirmar que de forma geral a economia apresenta esse comportamento previsto no modelo keynesiano, a eficiência marginal do capital influencia o nível de investimento que tem a contrapartida do lucro e da receita, suficientes para estabilizar o nível de emprego diante das expectativas. Em consequência disto, deve-se analisar, mais detalhadamente, a demanda por emprego das firmas e, mais uma vez, o estoque de capital das firmas. De resto,

As teorias que evoluíram da abordagem de Keynes em 1936 e Marshall em 1890 cujos principais representantes foram Perroux (1967), Myrdal (1965) e Hirschman (1961) são aquelas que enfatizavam o desenvolvimento através da industrialização. Tais teorias entraram em voga e passaram a inspirar políticas públicas que buscavam o desenvolvimento regional. O modelo ZFM foi fortemente influenciado pelas teorias do desenvolvimento regional do segundo grupo, com destaque para as ideias de: Myrdal, Hirschman, Perroux e North, uma vez que as teorias deste grupo serviram como alicerce para o desenvolvimento regionalizado no Brasil, seja no âmbito federal por meio da implantação de grandes projetos estruturantes nas regiões do país, seja no âmbito estadual servindo também como mecanismo às políticas de atração de novos investimentos. (SILVA *et al.*, 2019)

3. Metodologia

3.1 Teoria do controle ótimo

A Teoria do Controle Ótimo teve início com estudos clássicos de otimização na tentativa de resolver um famoso problema por parte de proeminentes matemáticos no fim do século XVII, o problema da braquistócrona. O primeiro cientista a enfrentá-lo foi Galileu Galilei, em 1638, mas não obteve êxito. O problema foi proposto, posteriormente, por Johann Bernoulli em junho de 1696 nas *Acta Eruditorum*, da seguinte forma: “Dados dois pontos A e B em um plano vertical, atribuir a um móvel M a trajetória AB ao longo da qual sob a ação de seu próprio peso, o móvel vai do ponto A ao ponto B no tempo mais curto”. Buscava-se a definição de uma trajetória de tempo mínimo para a ação da força gravitacional de um corpo físico.

A resolução foi alcançada no ano seguinte por Jacques Bernoulli, Newton, Leibniz e o Marquês de l'Hôpital marcando o nascimento do Cálculo das Variações; uma generalização do cálculo elementar de máximos e mínimos de funções cujo domínio é um conjunto de curvas.

Em 1956, L.S. Pontryagin e de seu grupo de colaboradores; V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze e E.F. Mishchenko, aplicaram condições iniciais a um conjunto fechado especificando as equações do Cálculo Variacional, estava criada a Teoria do Controle Ótimo; um conjunto condições necessárias, incluindo as condições de Euler-Lagrange de Weistrass, obtidas através da formulação do Princípio do Máximo (PONTYRAGIN *et alii*, 1962).

A Teoria do Controle Ótimo é utilizada na resolução de problemas de Otimização Dinâmica em que o tempo é uma variável explícita e buscam-se trajetórias ótimas tanto para variável de controle, fator que afeta a variável independente denominada variável de estado que representa o estado do sistema ao longo do tempo, seguindo-se do resultado ótimo da função objetivo; descrita, previamente, em função das três ou mais variáveis.

3.1.1 Princípio do máximo de Pontryagin

Passa-se à descrição da ferramenta utilizada na resolução do problema de maximização dos lucros das empresas do PIM. O Princípio do Máximo exige um método semelhante ao dos Multiplicadores de Lagrange. Por analogia, a função Hamiltoniana representa a função de Lagrange e a variável de coestado, o multiplicador de Lagrange. Porém, a diferença entre os fundamentos matemáticos é muito maior. Derivam, principalmente, das diferentes maneiras de definir a característica dinâmica do sistema. A formulação lagrangeana admite solução num espaço n-dimensional (espaço de configuração) com uma infinidade de curvas a sua escolha, através de uma equação diferencial de segunda ordem. Enquanto, a formulação hamiltoniana admite solução para o espaço 2n-dimensional (espaço de fases), com um par equações paramétricas diferenciais de primeira ordem: a equação de movimento das variáveis de estado e de coestado (NETO, J. B., 2004).

Em outras palavras, o método de Lagrange atinge o ponto ótimo por uma infinidade de trajetórias no espaço, já no método de Hamilton, isso se dá pela escolha de uma trajetória descrita por duas famílias de curvas. Portanto, como temos apenas uma função ótima e, esta deve obedecer a condição necessária de primeira ordem como veremos a seguir, podemos concluir que o método hamiltoniano deve transformar um problema dinâmico (de integração) em um problema estático (de diferenciação) com evolução temporal da restrição. O que significa que estamos resolvendo um problema mais simples.

Detalhadamente, a função hamiltoniana é uma função de quatro variáveis: t , tempo; y , variável de estado; μ , variável de controle; e, λ , a variável de coestado ou multiplicador de Lagrange. Esta última é interpretada economicamente como preço sombra, ou seja, a variação de valor da função objetivo dada uma variação unitária em uma das restrições (SALVATORE, 1996). Ao nosso estudo temos um significado muito próximo, revela a variação da função objetivo dada uma variação na equação de movimento para variável de estado, uma vez que as restrições, na abordagem lagrangiana, equivalem a equação de movimento da Teoria do Controle.

Exemplo de função hamiltoniana de controle, a seguir:

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t) f(t, y, u) \quad (1)$$

A função H é a função hamiltoniana composta pela função objetivo F , somada ao produto da função de preço sombra λ pela equação do movimento; a relação entre as variáveis do modelo. Esse tipo de função acima resolve o problema do Cálculo Variacional do tipo:

$$\begin{cases} \text{maximizar } \int_0^T F(t, y, u) \\ \text{sujeita a } \dot{y} = f(t, y, u) \\ y(0) = A; \quad y(t) \text{ livre} \\ u(t) \in U \quad \forall t \in [0; T] \end{cases} \quad (2)$$

A integral definida (2) quando associada a um valor real representa um funcional, uma função de funções (FLORES, 2011); objeto de estudo do Cálculo das Variações. A equação diferencial (3) é a equação de movimento da variável de estado; descreve a dinâmica do sistema.

A resolução pela Teoria do Controle, é conjunto de condições necessárias abaixo, denominado Princípio do Máximo de Pontryagin:

$$\text{i) } H(y, u^*, \mu) \geq H(y, u, \mu) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

$$\text{ii) } \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \mu} = f(y, u) \quad (4)$$

$$\text{iii) } \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (5)$$

$$\text{iv) } \lambda(T) = 0 \quad (6)$$

Vamos às explicações. A otimização da variável de controle antecede a otimização da função objetivo. Logo, a equação (4) é a otimização da variável de controle durante todo o intervalo de tempo quando há restrição temporal; denominado de período de planejamento. As equações (5) e (6) são as equações de movimento, lembrando que trabalha-se com a hipótese de que o controle atua sobre a variável de estado através da equação de movimento. A especificação (7) é a condição de transversalidade que deve ser utilizada quando não há condições de fronteira para definir as constantes no transcurso da solução, representa a escolha do alvo da trajetória temporal da função objetivo. Quando a região de controle é aberta a hamiltoniana admite derivada em relação a variável de controle e a equação (4) é substituída pela expressão:

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0 \quad (7)$$

Caso contrário, a região de controle tem restrição, o domínio torna-se um conjunto fechado e, soluções de fronteira são possíveis. Em consequência disto, a equação (8)

torna-se inválida (CHIANG, 2005).

Mas, para o nosso objetivo é necessário um caso mais particular. A solução para problemas autônomos, ou seja, problemas cuja função objetivo não depende do tempo, a técnica aplicada no presente trabalho.

3.1.2 Problemas autônomos

Um Problema Autônomo é um tipo de problema cuja função não depende explicitamente da variável tempo, ou seja, para o qual a data não importa. Ao invés disso, o importante é a interação atemporal das variáveis de controle e de estado na obtenção dos níveis ótimos procurados (CHIANG, 2005). Matematicamente, os problemas autônomos são mais fáceis de resolver porque as equações de movimento tornam-se mais simples.

O problema autônomo é definido, portanto, pelo Cálculo das Variações por:

$$\begin{cases} \text{maximizar } \int_0^T G(y, u) dt \\ \text{sujeita a } \dot{y} = f(y, u) \\ y(0) = A; \quad y(t) \text{ livre} \\ u(t) \in U \quad \forall t \in [0; T] \end{cases} \quad (8)$$

O integrando representa a função objetivo. O limite superior de integração é o tempo com trajetória do controle e do estado correspondentes.

Na Teoria do Controle, a resolução desse tipo de problema não-autônomo faz-se pelo produto do termo de correção e^{rt} com a função objetivo para retirar a influência da variável tempo.

Consequentemente, a função hamiltoniana deve ser descomplicada pela forma:

$$H \equiv G(y, u) + \lambda(t)f(y, u) \quad (9)$$

H_c é denominada função hamiltoniana de valor corrente e o termo μ multiplicador de valor corrente, sendo que $\mu = \lambda e^{rt}$. Essa substituição, retira o termo de desconto da função objetivo e torna o problema num sistema autônomo. Onde apenas a variável de coestado μ está em função do tempo. Desta maneira, o Princípio do Máximo ajustado às substituições resulta em:

$$\text{i) } H(y, u^*, \mu) \geq H(y, u, \mu) \quad \forall t \in [0, T] \quad \vee \quad \frac{\partial H}{\partial \mu} = 0 \quad (10)$$

$$\text{ii) } \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \mu} = f(y, u) \quad (\text{Equação de Movimento da variável de Estado}) \quad (11)$$

$$\text{iii) } \dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (\text{Equação de Movimento da variável de Coestado}) \quad (12)$$

$$\text{iv) } \mu(T) = 0 \quad (\text{Transversalidade}) \quad (13)$$

As equações de (10) a (13) acima são equivalentes as de (3) a (6). Com uma diferença entre a (13) e a (6), porque a derivada de μ pela regra do produto tem dois componentes e, à condição de transversalidade para reta vertical de (7), junta-se a segunda condição para reta horizontal. Completando o conjunto de condições que serão empregadas na resolução do modelo proposto.

4. Resultados

Os resultados se dividem em resultados econômicos em que se aborda as relações entre as variáveis para o caso do PIM e os resultados advindos da modelagem matemática como sugestão teórica para o problema original que é controlar as mesmas variáveis.

4.1 Resultados econômicos

Inicia-se pelo estudo do Modelo de Desenvolvimento Regional denominado Zona Franca de Manaus através do qual o Polo Industrial constituiu-se, ao longo do tempo, em base de sustentação tanto dos incentivos empresariais quanto dos benefícios sociais que são a contrapartida econômica às renúncias do estado brasileiro.

Historicamente, com o fim do ciclo da borracha houve a proposta, através do projeto de lei nº 1.310 de 23 de outubro de 1951 do Deputado Francisco Pereira da Silva, de um modelo econômico baseado num Porto Franco com o intuito de fomentar a atividade comercial na região e em países confinantes. Após a emenda do Deputado Maurício Joupert com o entendimento de que a criação de uma Zona Franca estenderia os benefícios econômicos, a lei nº 3.173 foi sancionada pelo Presidente Juscelino Kubitschek e publicada no Diário Oficial da União em 12 de junho 1957. Estava criada a Zona Franca de Manaus.

Porém, os investidores só se sentiram atraídos com a alteração deste dispositivo pelo Decreto-Lei nº 288, de 28 de fevereiro de 1967, promovida pelo governo do Marechal Humberto Alencar Castello Branco no âmbito da Operação Amazônia, um conjunto de medidas iniciadas no ano anterior que objetivavam o financiamento da iniciativa privada diante da situação geopolítica em que o Brasil e o mundo se encontravam no pós-Segunda Guerra. A saber, o país estava sob um governo militar desde 1964 que buscava uma estratégia de desenvolvimento e integração do território nacional (BENCHIMOL, 1997), enquanto os países desenvolvidos estavam descentralizando o capital industrial em busca da oferta de mão de obra em regiões não industrializadas, movimento que ficou conhecido como “diáspora industrial” (FURTADO, 1992).

Desde sua criação, a Zona Franca de Manaus (ZFM) sofreu várias mudanças no regramento jurídico e administrativo movidas por objetivos políticos diferentes. E, em parte, influenciados por decisões de fora do país. No entanto, pode-se descrever resumidamente as três fases iniciais do modelo de Zona Franca (MACHADO *et al*, 2006):

Primeira fase, entre 1967 e 1976, caracterizou-se pela formação do comércio interno com livre importação. O espaço do distrito Industrial foi criado em 30 de setembro de 1968 (ALMEIDA, 2011). Fase da criação de postos de trabalho com baixa remuneração na Indústria Montadora.

Segunda fase, de 1976 a 1991, foi marcada pelo Modelo de Substituição de Importações em economia fechada, índice mínimo de nacionalização e pelo incremento do turismo de compras. Fase intensiva em trabalho com aumento de capital nacional.

Quadro 1 – As fases da Zona Franca de Manaus

Períodos	1951-1967	1967-1975 (1ª)	1975-1991 (2ª)	1991- Atuais (3ª)
Denominação	Embrionária	Afirmação	Consolidação	Desenvolvimentista
Característica	Existência no papel	Início das operações	Elevado nível de comércio	Parque Industrial Vertical
Marco Regulatório	Lei 1.310/51 -	D. lei 288/67 -	D. Lei 1.435/75	Lei N. 8.387/91
	Lei 1.173/57	D. lei 61.244/67		

Fonte: Adaptado de Leocádio (2016).

E a terceira fase, de 1991 em diante, marcada pela abertura econômica, substituição do índice mínimo de nacionalização pelo Processo Produtivo Básico (PPB), a diminuição

da atividade comercial e a modernização do Polo Industrial de Manaus. Fase intensiva em capital com diminuição dos postos de trabalho.

Os números ordinais que estão dispostos na primeira linha do Quadro 1 representam as fases descritas no texto. Ainda assim, mesmo que exista outras divisões como descritas por Almeida (2011), há um consenso entre os escritores clássicos sobre essa classificação que é confirmado em trabalhos recentes, desta forma:

Ao analisar o desenvolvimento da ZFM, diversos autores como Carvalho (2009), Garcia (2007), Mourão (2006), Salazar (1992), e até recentemente a própria SUFRAMA (2012d) consideram que o modelo tem apenas três fases, com a primeira iniciando-se em 1967. (MENDONÇA, 2013, p. 41).

Além disso, outras classificações para o modelo são decorrentes de análises conjunturais e carecem de marcos legais e, consequentemente, temporais. Portanto, passamos ao estudo do viés industrial da ZFM que teve seu apogeu na última fase e estende alguns de seus fundamentos até os dias de hoje e é o objeto desse trabalho.

4.1.1 O polo industrial de Manaus (PIM)

Segue-se com a análise apenas dos investimentos industriais, separados dos investimentos do comércio e da agropecuária, os outros polos de atuação da Zona Franca. Durante a primeira fase, foram apresentados à SUFRAMA, órgão vinculado ao Ministério da Economia criada pelo Decreto-Lei nº 291 de 28 de fevereiro de 1967 e responsável pela administração dos incentivos fiscais, 114 projetos industriais num cenário já mencionado de dependência da economia externa como projeto governamental de desenvolvimento e interação regionais. No decorrer da segunda fase, houve o incremento de 815% nos projetos apresentados à autarquia o que demonstra que o fechamento da economia pelo governo militar vigente aliado ao fortalecimento do Modelo de Substituição de Importações (MSI), à exigência de índices mínimos de nacionalização e ao contingenciamento fomentaram um crescimento industrial num período conhecido como “milagre econômico” cujo resultado foi a utilização intensiva do fator trabalho. Em outras palavras, o modelo que se estendeu de meados dos anos 1970 ao início dos 1990 protegia a indústria aplicando restrições em todo o território nacional o que criou um enclave comercial na região. Ademais, a manutenção de cotas de importação tinha o intuito de melhorar a balança comercial e refletiram no desenvolvimento do terceiro setor através do turismo de compras, os altos índices de nacionalização do produto por sua vez aumentaram o número de empregos diretos e indiretos usados e, por fim, como a maior parte do produto estava destinada ao Estado de São Paulo o PIM exercia certo controle sobre o mercado consumidor (MACHADO, 2006).

Na avaliação dos resultados desse período pode-se destacar que,

Até fins de 1983, a Suframa havia aprovado 266 projetos industriais (218 já estavam implantados) distribuídos em 21 setores, com investimentos fixos no valor de US\$ 5 bilhões e a geração de 51,6 mil empregos diretos. A produção industrial da Zona Franca de Manaus alcançava resultados econômicos e tecnológicos bastante positivos. Além de atingir elevados índices de nacionalização, reduzindo importações e economizando divisas para o país, registrava níveis crescente de desagregação dos componentes utilizados e de absorção de tecnologia. (GARCIA, 2004, p.95).

Com o passar do tempo, houve o esgotamento do Modelo de Substituição de Importações ocorrido por vários motivos, dentre eles; os choques do petróleo de 1973 e 1979 que aceleraram a inflação na década de 80 e influenciaram as taxas de juros mundiais, desencadeando a desvalorização da moeda nacional como saída para amortecer os desequilíbrios externos. Além disso, a recessão econômica dos anos de 1981 a 1983 desvelou a crise de endividamento público e a dificuldade em manter a política intervencionista do Estado (MARQUES *et al*, 2004) resultando no processo de abertura econômica, marca indelével do que estava por vir, o livre comércio.

O PIM estava mais uma vez ameaçado e a única saída era o redirecionamento do modelo de política industrial, a ZFM mudou do formato de Zona Empresarial para o de Zona Franca Industrial, ou seja, migrou do objetivo de desenvolvimento regional e geração de empregos para da política de qualidade e competitividade na indústria (CARVALHO, 2009).

Na terceira fase, após 1991, a reestruturação do Polo Industrial de Manaus (PIM) firmou-o como eixo motor do desenvolvimento regional a partir da abertura econômica dos anos 90 e, principalmente, da mudança na forma de medir a participação nacional no produto industrial com a adoção de uma nova metodologia, a saber,

O PPB foi definido pela Lei 8.387, de 30 de dezembro de 1991 (BRASIL, 1991) como “o conjunto mínimo de operações no estabelecimento fabril que caracteriza a efetiva industrialização de determinado produto” e passa a ser utilizado como a contrapartida a ser cumprida pelas empresas de qualquer setor instaladas no PIM. (MENDONÇA, 2013, p).

Dentre as mudanças significativas está o acesso das empresas as cadeias mundiais de produção de insumos que levaram a utilização de novas tecnologias em livre concorrência com o mercado externo. No quadro a seguir temos a quantidade de PPB's apresentados no início da terceira fase da ZFM:

Tabela 1 – Número de Processos Produtivos Básicos de 1993 a 2004.

ANO	Processos Produtivos Básicos
1993	586
1994	41
1995	5
1996	60
1997	106
1998	107
1999	17
2000	93
2001	633
2002	236
2003	117
2004	145
Total	2.146

Fonte: Adaptado de Garcia (2004).

Pode-se observar uma queda brusca entre os anos de 1993 e 1994, uma estabilidade nos anos de 1997 e 1998, e um salto entre 2000 e 2001. Do que se pode deduzir um nível de produção diferente para cada cenário econômico diferente, afetando a atratividade dos investimentos e, consequentemente, o nível de emprego praticado. Sendo que o objetivo deste trabalho, como já foi descrito, é apresentar um modelo matemático para esses dois últimos níveis com a intenção de atingir o lucro máximo das empresas ou do setor uma vez assumidas as funções de produção e custo descritas.

4.1.2 Os empregos

A partir de agora compara-se o interesse empresarial e a decisão sobre o nível de emprego no período já citado. Os motivos: Primeiro, o intervalo considerado na tabela 1 possui todos os tipos possíveis de movimento do índice estudado (número de PPB's fixados); crescimento e decrescimento abruptos, crescimento e decrescimento suaves e estabilidade. Segundo, o intervalo de mais de uma década encontra-se em uma única fase do modelo de desenvolvimento. Terceiro e último, em uma rápida observação do cenário nacional, essa fase inicia-se com o Plano de Estabilização Econômica denominado Plano Real em 1993 implementado no governo Itamar Franco no contexto assim descrito:

Mendonça de Barros e Goldenstein destacavam que a economia brasileira passava por quatro processos que interagiam entre si: globalização, abertura econômica, estabilização e privatização. Essas transformações estariam alterando a estrutura básica do capitalismo brasileiro e provocando uma verdadeira revolução. (LACERDA, 2010, p. 220).

Parece óbvio que esta estabilidade não foi conseguida de maneira simples. Portanto, parte-se do exame do ano 1990. Neste ano registrou-se 76.798 empregos diretos, enquanto nos anos seguintes, 58.875 e 40.361 empregos, respectivamente. Uma redução devido a "reconversão industrial" associada a liberação das importações em todo o país e a alteração da metodologia dos índices de nacionalização. Tem-se:

Tabela 2 – Número de Processos Produtivos Básicos, mão de obra, e Percentual de mão de obra.

ANO	Processos Produtivos Básicos	Mão de Obra	Mão de Obra (%)
1993	586	37.734	Ano Ref.
1994	41	41.477	10
1995	5	4.876	29
1996	60	48.494	29
1997	106	50.773	35
1998	107	49.583	31
1999	17	43.114	14
2000	93	50.005	33
2001	633	54.759	45
2002	236	57.812	53
2003	117	64.971	72
2004	145	79.448	111
Total	2.146	626.930	-

Fonte: Indicadores de Desenvolvimento do Polo Industrial de Manaus (1988-2013).
Elaborado por: COISE/CGPRO/SAP – SUFRAMA.

Pode-se observar que o ano 1990 foi o de maior número de pessoas ocupadas na indústria, só comparado ao ano de 2004, o que comprova que o modelo da segunda fase operou com características de monopólio, isto é, a indústria estava protegida, tinha acesso a um grande volume de mão-de obra e tinha controle senão acesso ao maior mercado consumidor do país, o Estado de São Paulo. Logo, está justificado que este ano foi o ápice do MSI e seu declínio ocorreu exatamente após 1991 com o número mínimo de empregos sendo atingido no ano de 1993, início da série e ano utilizado como referência.

Analisando o quadro acima, o número de PPB's apresentados tem pouca relação com o nível de empregos, mas nota-se que a porcentagem de crescimento da mão de obra de cada ano comparada ao ano de referência indica a existência de um nível

mínimo de pessoas ocupadas, ou seja, de um estoque de empregos que se manteve praticamente o mesmo nos anos de 1995 e 1996, teve uma pequena variação entre os anos de 1997 e 1998 embora fossem apresentados, praticamente, a mesma quantidade de projetos, e que os anos em que apresentaram mais projetos a SUFRAMA foram os de 1993 mesmo com crescimento de apenas de 10% no nível de emprego, reação a capacidade ociosa herdada do triênio anterior, e de 2001 com o maior número de projetos e um crescimento de 12% de mão de obra. E, ainda que o ano que menos teve os PPB's teve umas das maiores quantidades de pessoas ocupadas em relação ao ano-base. Até porque o número de PPB's apresentados não necessariamente é igual ao número de projetos implementados, e, sim, demonstra um interesse das empresas de vários setores em estabelecerem-se no PIM.

4.1.3 Os investimentos líquidos

Existe ainda uma outra dificuldade de interpretar a tabela acima. O número de projetos apresentados inclui os outros dois polos de atuação da ZFM, mesmo que se entenda que na terceira fase o PIM sobressaiu-se sobre os demais. Portanto, passamos a análise dos investimentos produtivos líquidos, especificamente, do Polo Industrial de Manaus e, depois, a relação deste com o nível de emprego. Aqui deve-se lembrar que os investimentos líquidos, também, representam a variação no estoque de capital, inclusive, no Modelo Neoclássico de Crescimento Ótimo (CHIANG, 2006) para explicar que não se está mudando o objeto e muito mesmos as variáveis em estudo. Portanto, fez-se imprescindível mudar para um período com maior quantidade de dados de comparação mudamos de período, de 2000 a 2010. Salientando que não havia dados para os investimentos líquidos para o período entre 1993 a 2004, conforme Tabela 3.

Tabela 3 – Investimentos Produtivos Líquidos e percentual do Investimentos Produtivos Líquidos entre os anos de 2000 a 2010.

Ano	Investimentos Produtivos Líquidos (milhões US\$)	Investimentos Produtivos Líquidos (%)
2000	1.549,1	Ano Ref.
2001	1.963,6	27
2002	2.089,4	35
2003	2.759,4	78
2004	3.448,6	123
2005	4.565,7	195
2006	5.548,3	258
2007	6.703,1	333
2008	7.915,0	411
2009	7.895,9	410
2010	9.278,9	499
Total	53.717,00	-

Fonte: Indicadores de Desenvolvimento do Polo Industrial de Manaus (1988-2013).

Elaborado: COISE/CGPRO/SAP- SUFRAMA.

É possível verificar um nível baixo de investimento um ano após o ano de referência, alta acumulada no ano de 8%, seguido de uma subida vertiginosa, com alta de 43% no terceiro ano da série, culminando com o nível máximo em 2010. Nesse ano o volume de investimento foi 500% maior do que do ano 2000. E uma estabilidade nos anos 2008 e 2009. A pergunta é: Qual foi o nível de emprego praticado em relação ao volume de investimento aplicado neste ano? É evidente que o investimento líquido representa a variação do capital ao longo do tempo diante de um investimento total constante. Além do mais, parte desse investimento deve pagar uma massa de salário que varia de acordo com a decisão das empresas no que se refere ao estoque de empregos. E,

de acordo com a decisão das empresas no que se refere ao estoque de empregos. E, portanto, o nível de emprego deve ser proporcional ao investimento líquido (Hipótese de Proporcionalidade). Basta saber, o quanto?

4.1.4 A relação entre os investimentos líquidos e o emprego

Na Tabela 4 tem-se o Número de Pessoas Ocupadas na década a partir do ano 2000:

Tabela 4 – Pessoas Ocupadas e Pessoas Ocupadas (%) entre os anos de 2000 a 2010.

Ano	Pessoas Ocupadas	Pessoas Ocupadas (%)
2000	50.005	Ano Ref.
2001	54.759	10
2002	57.812	16
2003	64.917	30
2004	79.448	59
2005	89.867	80
2006	98.666	97
2007	9.872	97
2008	106.914	114
2009	92.695	85
2010	103.662	107
Total	897.465,00	-

Fonte: Indicadores de Desenvolvimento do Polo Industrial de Manaus (1988-2013).

Elaborado: COISE/CGPRO/SAP - SUFRAMA

Constata-se no primeiro biênio da série um crescimento modesto (15%) e constante, depois, novamente, no biênio 2004-2005 também um crescimento de 20% em relação ao ano anterior. Uma estabilidade em 2006-2007. Agora compara-se as porcentagens dos investimentos líquidos e dos empregos, lembrando que ambos são acumulados ano após ano.

Da Tabela 5 pode-se concluir que o acréscimo percentual é proporcional tanto em mão-de-obra como em investimentos apenas nos anos 2001-2002. A estabilidade dos índices ocorreu em diferentes períodos o que demonstra a iniquidade da evolução dos fatores trabalho e capital no modelo citado. Isso deve-se, em parte, a conjuntura política e econômica da época, mas a explicação foge do escopo do trabalho que almeja encontrar, matematicamente, níveis ótimos para essas variáveis de tal forma que seja ajustável nas equações e indiscutível os patamares aplicados.

Tabela 5 – Porcentagens de Pessoas Ocupadas e de Investimentos Produtivos Líquidos.

Ano	Pessoas Ocupadas (%)	Investimentos Produtivos Líquidos (%)
2000	Ano Ref.	Ano Ref.
2001	10	27
2002	16	35
2003	30	78
2004	59	123
2005	80	195
2006	97	258
2007	97	333
2008	114	411
2009	85	410
2010	107	499

Fonte: Indicadores de Desenvolvimento do Polo Industrial de Manaus (1988-2013).

Elaborado: COISE/CGPRO/SAP - SUFRAMA.

4.2 Resultados matemáticos

Os resultados aparecem da aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin ao seguinte problema matemático, a otimização da função de lucro composta pela função de produção Cobb-Douglas e pela função linear nos custos. A inspiração em tratar o assunto deve-se ao trabalho do Professor Dr. James Kahn (Rivas *et al.*, 2009) no qual foram utilizadas funções de produção log-linear no modelo de comportamento matemático do PIM. No entanto, em relação a equação diferencial de restrição admite-se a proporcionalidade dos fatores ao longo do tempo o que corresponde a Equação de Demanda por Trabalho de Ricardo. Desta forma, chega-se a primeira formulação do problema.

4.2.1 Primeira formulação matemática

$$\begin{cases} \text{maximizar } \int_0^T \pi(L, K) dt \\ \text{sujeita a } \dot{L} = f(\dot{K}) \\ L(0) = A; \quad L(t) \text{ livre} \\ K(t) \in K \quad \forall t \in [0; T] \end{cases} \quad (14)$$

Função de Lucro

A função de lucro é composta pela função de produção Cobb-Douglas e a função linear dos custos. Veja abaixo:

$$\pi(L, K) = PAK^\alpha L^{1-\alpha} - rK - \omega L \quad (15)$$

Em que:

π = Lucro empresarial

P = Preço do bem menos o custo de transporte unitário

A = Parâmetro da escala de produção

α = Parâmetro da escala de produção em relação aos insumos

r = taxa de juros da economia

ω = salário

K = Capital empresarial (variável de controle)

L = Demanda empresarial por trabalho (variável de estado)

O comportamento restritivo

A restrição tem um análogo na Teoria de Desenvolvimento de David Ricardo. A saber, a equação representa a demanda por trabalho no modelo de desenvolvimento clássico (SOUZA, 1999, p. 109) em que a demanda por trabalho é proporcional a acumulação do capital durante um período de tempo. As mudanças na quantidade dos insumos podem ser interpretadas de duas maneiras: Pelo caráter puramente matemático, ou seja, em relação a variação temporal da quantidade absoluta dos insumos. Ou pelo caráter econômico, em que se considera o estoque dos insumos, visão no âmbito da gestão administrativa. Isso se deve em parte por se tratar de uma função integral de variável constante. Em outras palavras, quando se vê apenas o alvo encontramos um nível a ser atingido, porém pode-se considerar, também, o volume de insumos empregados ao longo do tempo. Como todo o acréscimo está acima do ponto ótimo entende-se que o nível ótimo é igual ao estoque desejado.

A restrição

$$\frac{dL}{dt} = q \frac{dK}{dt} \quad (16)$$

Em que:

$\frac{dL}{dt}$ = variação temporal do trabalho, estoque de trabalhadores ou demanda por trabalho

$\frac{dK}{dt}$ = variação temporal do capital, estoque de capital ou acumulação de capital

q = constante de proporcionalidade

A simplificação da equação de restrição com a substituição da variação temporal do capital, ou ainda, do estoque de capital pela diferença entre o investimento total e a depreciação do capital é relevante para a resolução do problema e aplicação do método e, apresenta uma substituição bastante conhecida da teoria econômica, principalmente, da Teoria dos Investimentos.

Consequentemente, a restrição passa a ser:

$$\frac{dL}{dt} = q(I - \delta K) \quad (17)$$

Em que:

I = investimento total

δ = taxa de depreciação do capital

Esse detalhamento é necessário para que se tenha apenas derivadas de primeira ordem durante a aplicação do método de resolução, facilitando a solução e a compreensão do modelo. Importante salientar que a função de restrição passa a depender apenas do capital e não da derivada primeira do capital.

4.2.2 Segunda formulação matemática

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximizar } \int_0^T \pi(L, K) dt \\ \text{sujeita a } \frac{dL}{dt} = q \frac{dK}{dt} = q(I - \delta K) \\ L(0) = A; \quad L(t) \text{ livre} \\ K(t) \in K \quad \forall t \in [0; T] \end{array} \right. \quad (18)$$

Primeiro passo, construir a função Hamiltoniana, utilizada para resolver a otimização do funcional cuja função objetivo é o lucro especificado.

$$H(L, K, \mu) = \pi(L, K) + \mu(t) \frac{dL}{dt} \quad (19)$$

Substituindo o argumento da função de lucro e a equação de movimento da variável de estado, acha-se:

$$H = [PAK^\alpha L^{1-\alpha} - rK - \omega L] + \mu[q(I - \delta K)] \quad (20)$$

Para resolver este problema autônomo, ou seja, problema no qual a função objetivo não depende explicitamente do tempo, devemos aplicar à função Hamiltoniana, eq. (7), um conjunto de condições necessárias de primeira ordem denominado Princípio do Máximo de Pontryagin.

A primeira condição tem o intuito de otimizar a Hamiltoniana em relação a variável de controle, onde $\frac{\partial H}{\partial K} = 0$, logo:

$$\frac{\partial H}{\partial K} = \frac{\partial \left\{ [PAK^\alpha L^{1-\alpha} - rK - \omega L] + \mu [q(I - \delta K)] \right\}}{\partial K} = 0 \quad (21)$$

Resolvendo para K , a variável de controle:

$$PA\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - r - \mu q\delta = 0 \quad (22)$$

$$PA\alpha \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha-1} = r + \mu q\delta \quad (23)$$

$$K = \left(\frac{r + \mu q\delta}{PA\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} L \quad (24)$$

O termo central não depende explicitamente do tempo, mas tem uma variável dependente do tempo, $\mu = \mu(t)$. Portanto, pode-se simplificar a notação, sugerindo que exista uma função $D = D(\mu)$ ou, ainda, $D = D(\mu(t))$, como função composta com μ . Mesmo assim, que possa chegar facilmente no valor de D a partir dos valores de μ , uma vez que, existem apenas constantes e operações simples entre uma e outra variável. Esta variável μ é o preço-sombra na interpretação econômica, o multiplicador de Lagrange na interpretação metodológica da matemática e a variável de coestado na Teoria do Controle Ótimo. Sendo assim, deduz-se da moderna teoria do controle que o elemento abaixo é o atuador do sistema de controle. Em outras palavras, é a função que orienta as trajetórias dos insumos através do elemento de controle $\mu q\delta$. Desta forma:

$$D(\mu(t)) = \left(\frac{r + \mu(t)q\delta}{PA\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (25)$$

Nesta expressão, apenas μ é variável no tempo. Reescrevendo:

$$D(\mu) = \left(\frac{r + \mu q\delta}{PA\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (26)$$

E, finalmente

$$K = D(\mu) L \quad (27)$$

Lembrando que a restrição sugere que as variáveis de estado e de controle são dependentes do tempo. Assim:

$$K(t) = D(\mu(t)) L(t) \quad (28)$$

E, dependendo do formato de μ , o preço-sombra, pode-se utilizar a função $D = D(\mu)$ como uma função que dependa apenas do tempo, $D = D(t)$, e represente todo o termo central da equação (10). Desta maneira,

$$K(t) = D(t) L(t) \quad (29)$$

O que está sendo reinterpretado nas equações acima é: se D é uma função composta com μ , eq. (13), e, μ depende de t . Logo, podemos deduzir que D dependa de t , eq. (14), ou que D é uma constante, eq. (12), o que pode ocorrer caso haja diferença entre o tempo do elemento que está atuando no controle e o tempo das quantidades demandadas.

Continuando com a derivada do emprego em relação ao tempo e sua relação com

a função Hamiltoniana; a função de restrição do problema é a equação de movimento da variável de estado, o trabalho, que surge da derivada da Hamiltoniana em relação ao preço-sombra.

$$\dot{L} = \frac{dL}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu} \quad (30)$$

Mas o objetivo é resolver as equações de movimento, as trajetórias da variável de estado e da variável de controle. Portanto, substituindo na equação de movimento da variável de estado L , eq. (4), a equação de otimização da Hamiltoniana em relação a variável de controle K , eq. (12), encontra-se a equação diferencial que representa a dinâmica da variável emprego.

$$\frac{dL}{dt} = q[I - \delta K] = q[I - \delta DL] = qI - (q\delta D)L \quad (31)$$

Daí,

$$\frac{dL}{dt} = qI - (q\delta D)L \quad (32)$$

Arranjando mais um pouco:

$$\frac{dL}{dt} + (q\delta D)L = qI \quad (33)$$

O termo $q\delta D$ à primeira vista não é constante porque D depende μ que depende do tempo como já foi discutido, porém considerando-o constante tem-se uma equação diferencial de primeira ordem cuja solução traz importantes resultados. Para resolver, recorreremos ao método de resolução de equações diferenciais de primeira ordem (ZILL *et al*, 2001) e, o fator de integração é $e^{\int (q\delta D)dt} = e^{(q\delta D)t}$, resolvendo:

$$\frac{d}{dt} [Le^{(q\delta D)t}] = qIe^{(q\delta D)t} \quad (34)$$

$$\int \left\{ \frac{d}{dt} [Le^{(q\delta D)t}] \right\} = qI \int \left\{ e^{(q\delta D)t} \right\} dt \quad (35)$$

$$Le^{(q\delta D)t} = qI \frac{e^{(q\delta D)t}}{(q\delta D)} + K_0 \quad (36)$$

E, finalmente, acha-se a equação de movimento da variável trabalho:

$$L = \frac{I}{\delta D} + K_0 e^{-q\delta Dt} \quad (37)$$

Para encontrar a trajetória ótima do capital basta multiplicar esta função por D como na eq. (12):

$$K = DL = D \left(L = \frac{I}{\delta D} + K_0 e^{-(q\delta D)t} \right) \quad (38)$$

Resultando em:

$$K = \frac{I}{\delta} + K_0 D e^{-(q\delta D)t} \quad (39)$$

A última condição necessária é a equação de movimento da variável de coestado ou do preço-sombra. Segue a última relação das variáveis estudadas com a função Hamiltoniana e sua resolução:

$$\dot{\mu} = - \left(\frac{\partial H}{\partial L} \right) \quad (40)$$

Resolvendo:

$$\dot{u} = - \frac{\partial \{ [PAK^\alpha L^{1-\alpha} - rK - \omega L] + \mu [q(I - \delta K)] \}}{\partial L} \quad (41)$$

$$\dot{u} = - [PAK^\alpha (1 - \alpha) L^{-\alpha} - \omega] \quad (42)$$

$$\dot{u} = \underbrace{\left[\omega - PA(1 - \alpha) \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha \right]}_B \quad (43)$$

$$\dot{u} = B \quad (44)$$

Considerando B constante, tem-se:

$$u(t) = Bt + C \quad (\text{Multiplicador de Lagrange ou variável de coestado}) \quad (45)$$

Sabendo-se que μ é uma função linear e que o coeficiente angular é a diferença entre o salário e a expressão que representa a derivada primeira da função de produção Cobb-Douglas, conclui-se que o termo, $PA(1 - \alpha) \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha$, é igual ao Valor da Produtividade Marginal do Trabalho, $VPMgL$, para a função de produção citada. Por conseguinte, pode-se reescrever a eq. (17) como:

$$u(t) = [\omega - VPMgL]t + C_0 \quad (46)$$

Expandindo a interpretação econômica a partir da eq. (10) que representa a otimização da Hamiltoniana em relação a variável capital, como já foi citada. Tem-se:

$$VPMgK - r - \mu q \delta = 0 \quad (47)$$

Substituindo, também, o valor de μ :

$$VPMgK - r - \{ [\omega - VPMgL]t + C_0 \} q \delta = 0 \quad (48)$$

Encontrando uma relação linear entre os dois valores de produtividade marginal dos insumos:

$$VPMgK = r + \{ [\omega - VPMgL]t \} q \delta + C_1 \quad (49)$$

Reorganizando,

$$VPMgK = (r + C_1) - q \delta [VPMgL - \omega]t \quad (50)$$

A interpretação marginalista apresenta uma relação linear entre os valores das Produtividades Marginais dos insumos, ao longo do tempo. Da qual deduz-se que não é o ótimo global do capital, uma vez que o valor da produtividade marginal do capital não é igual a taxa de juros que é a remuneração do capital. Mas, introduz um elemento de controle, $\mu q \delta$, composto pelo preço-sombra, a constante de proporcionalidade entre o capital e o trabalho além da depreciação do capital, que perturba o ótimo da função objetivo quando da sua derivação em relação a variável de controle. Por isto, vê-se que toda a expressão $C_1 - q \delta [VPMgL - \omega]t$ deve zerar para que o capital alcance o nível ótimo concomitantemente com o nível ótimo do trabalho, em razão da diferença entre o valor da produtividade marginal do trabalho e o salário, multiplicados pelas constantes q e δ , chegar ao valor de C_1 e interromper a contribuição.

4.2.3 Validação do modelo

A validação do modelo desenvolvido se dá através da análise das trajetórias ótimas encontradas. Cada uma das equações, (37) e (39), possuem um termo dependente da função exponencial. São eles, $K_0 e^{-q\delta D t}$, e, $K_{0D} e^{-(q\delta D)t}$, que respectivamente representam as trajetórias ótimas.

Nos pontos estacionários a dinâmica dos fatores é zero, logo, das equações de movimento, $\frac{dL}{dt} = q(I - \delta K)$, e, $\frac{dK}{dt} = I - \delta K$, chega-se em, $\frac{I}{\delta D}$ e $\frac{I}{\delta}$, que são; o ponto alvo da variável de estado ou o ponto estacionário da eq. (37) e o ponto estacionário da equação de movimento do capital, a variável de controle. Portanto, aplicando a condição de transversalidade, $\mu(T)=0$, acaba a contribuição do elemento de controle, $\mu q \delta$, à derivada em relação a variável de controle da função Hamiltoniana, eq. (22), e, por conseguinte, a produtividade marginal do capital se iguala ao valor de sua remuneração do capital, r , a taxa de juros, concordando com a teoria econômica (BORJAS, 2012).

Por outro lado, o preço sombra é uma função linear decrescente que só existe se a produtividade marginal do trabalho for diferente da sua remuneração, ω , o salário, também concordando com a teoria. Em outras palavras, as trajetórias saem dos pontos, $\frac{I}{\delta D} + K_0$, e, $\frac{I}{\delta} + K_0$, e chegam nos pontos estacionários de cada fator, além disso esses pontos coincidem com a igualdade entre as produtividades marginais e suas respectivas remunerações.

5 Conclusão

Foram completadas todas as fases da modelagem matemática para o problema autônomo no domínio da Teoria do Controle Ótimo maximizando um tipo específico de lucro das firmas. A saber, entende-se que essa função de lucro pode ser praticada por empresas do PIM que decidam pelas curvas de produção e custo citadas. Para isso, foram realizados estudos da relação entre os insumos que representam a fase de experimentação da modelagem.

A fase de abstração foi dedicada à descrição do problema a partir da escolha das variáveis e de equações diferenciais que representam o comportamento matemático do polo. A resolução se deu pela aplicação do máximo de Pontryagin que teve suas consequências amplamente estudadas. A modificação do problema se deu pela substituição da derivada do capital pelo próprio capital na função de restrição, passo importante pra resolução do funcional. A validação do modelo ocorreu em concordância com a teoria econômica, a produtividade marginal.

Concluiu-se a partir do estudo dos índices do PIM que houve momentos em que essas variáveis atuaram conjuntamente com o aumento proporcional do número de pessoas ocupadas em relação aos investimentos produtivos líquidos. Porém, não foi o que se observou durante o todo o período, principalmente, na década de 2000 a 2010. O que se observou foi o descompasso e o distanciamento dos investimentos relativamente à quantidade de mão de obra utilizada.

O resultado são curvas de demanda de trabalho e capital que atingem o ótimo quando se igualam à remuneração dos fatores. Ademais a análise da função Hamiltoniana encontrou uma relação linear entre as produtividades marginais dos insumos em que está sendo exercido o controle almejado. Finalmente, o trabalho de caráter matemático conseguiu soluções importes do ponto de vista econômico e da decisão futura das firmas para se controlar o nível de emprego através do nível de capital empregado num cenário de proporcionalidade entre eles e de benefícios sociais, uma vez que não devem acarretar disparidade entre os índices do PIM.

Referências

ALMEIDA, R. N. P. A Zona Franca de Manaus no contexto da política industrial brasileira. XXXV Encontro da ANPAD. Rio de Janeiro. 2011.

ARIFFIN, N.; FIGUEIREDO, P.N. Internacionalização de competências tecnológicas: implicações para estratégias governamentais e empresariais de inovação e competitividade da indústria eletrônica no Brasil. Rio de Janeiro. Editora FGV. 2003

AMITRANO, C. R. Regimes de crescimento, restrição externa e financeirização: uma proposta de conciliação. Economia e Sociedade, Campinas, v. 22, n. 2 (48), 2013.

BASSANEZI, R. C. Modelagem Matemática - uma investigação. São Paulo: Contexto, 2002.

BENCHIMOL, S. ZFM - Pólo de Desenvolvimento Industrial. Ed. Universidade do Amazonas, 1997.

BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. da M. Modelagem Matemática. Uberlândia, MG: UFU, 2014.

BISPO, J. S. Criação e distribuição de riqueza pela Zona franca de Manaus. São Paulo. 2009. Tese (Doutorado). USP-Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade.

BRUE, S. L. História do Pensamento Econômico. São Paulo: Thomson Pioneira, 2004.

CARVALHO, M. B. S. de A. O empresário local e a zona franca de Manaus: reprodução social e globalização econômica (Tese) – Porto Alegre, 2009

CHIANG, A. C.; WAINWRIGHT, K. Matemática para Economistas. Tradução de Arlete Simile Marques. Rio de Janeiro, Elsevier, 2006.

DIEESE. O mercado de trabalho formal brasileiro: resultado da RAIS 2011. São Paulo: DIEESE, out. 2012. (Notas Técnicas, 116).

DIEESE. O mercado de trabalho formal brasileiro: resultado da RAIS 2012. São Paulo: DIEESE, mar. 2014. (Notas Técnicas, 133).

DIEESE. O mercado de trabalho formal brasileiro: resultado da RAIS 2013. São Paulo: DIEESE, set. 2014b. (Notas Técnicas, 140).

FURTADO, C. Brasil: a construção interrompida. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1992.

FLORES, A. P. X. Cálculo variacional: aspectos teóricos e aplicações. 2011. 69 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/94375>>.

GARCIA, E. Modelo de Desenvolvimento Zona Franca de Manaus: História, conquistas e desafios. Manaus: Norma. 2ª ed., 2004.

GUERRA, M. F. L. O complexo eletrônico no Brasil: uma análise regional. 1995. Dissertação de mestrado - Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional - CEDEPLAR, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

KAHN, J. R. O modelo Comportamental Matemático do Polo Industrial de Manaus. In: RIVAS, Alexandre A. F.; MOTA, José A.; MACHADO, José A. C. (orgs) Instrumentos Econômicos para a Proteção da Amazônia: A experiência do Polo Industrial de Manaus. Curitiba: Ed. CRV/ PIATAM, 2009, p. 75 – 87

KEYNES, J. M. Teoria geral do emprego, do juro e da moeda (Tradução do original em inglês 1936). São Paulo: Atlas, 1970.

MACHADO, J. A. C.; OLIVEIRA JUNIOR, A. R.; COSTA, F. A.; SANTANA, A. C. Metamorfoses do Modelo Zona Franca de Manaus: Desafios à pesquisa e ao planejamento do desenvolvimento regional. In: Elenise Scherer, Jose Aldemir de Oliveira. (Org.). Amazônia: Políticas Públicas e Diversidade Cultural. Amazônia: Políticas Públicas e Diversidade Cultural. 1 ed. Rio de Janeiro: Garamond, 2006.

MENDONÇA, M. B. de. O processo de decisão política e a Zona Franca de Manaus. Tese (Doutorado em Administração Pública e Governo) – Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2013

MIRANDA, R. N. de. "Zona Franca de Manaus: Desafios e Vulnerabilidades". Núcleos de Estudos e Pesquisas do Senado, nº 126 (2013).

MOSELEY, F. *A critique of the marginal productivity theory of the price of capital*. In: *Real-world Economics Review*, nº 59, março de 2012.

NETO, J. Ba. Mecânicas Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.

OLIVEIRA, J. L. C. Um estudo sobre renúncia tributária e os benefícios gerados pela Zona Franca de Manaus. Estudos do CEPE Revista de Economia e Administração, v. Jul./ Dez.12, p. 38-60, 2012.

OREIRO, J. L. Teorias Alternativas de Crescimento e Distribuição de Renda. Curso de História do Pensamento Econômico. Faculdade de Economia e Finanças - IBMEC. 2000.

OREIRO, J. L.; MISSIO, F. J. EQUILÍBRIO COM PLENO EMPREGO E EQUILÍBRIO COM DESEMPREGO EM UM CONTEXTO DE PREÇOS E SALÁRIOS FLEXÍVEIS: o debate entre Keynes e os (neo) clássicos. Working Papers. 0036, Universidade Federal do Paraná, Departamento de Economia. 2006.

PONTRYAGIN, L. S. *et al. The Mathematical Theory of Optimal Processes*, vol. 4. *Interscience*, 1962.

RIVAS, A. A. F.; MOTA, J. A.; MACHADO, J. A. C. (org.) *Instrumentos Econômicos para a Proteção da Amazônia: A experiência do Polo Industrial de Manaus*. Curitiba: Editora CRV. Coeditora: PIATAM, 2009.

LACERDA, A. C. de *et al.*; org. José Márcio Rego, Rosa Maria Marques; *Economia Brasileira. colaboração especial Rodrigo Antônio Moreno Serra. — 4.ed. — São Paulo: Saraiva, 2010.*

ROCHA, B. F.; SÁ, L. Y. B. A. V. *Relação entre crescimento econômico e emprego formal no Estado do Amazonas para o período de 2006 a 2009. Anais do XX Congresso Brasileiro de Economia, CBE 2013. Manaus – Amazonas, 2013*

SÁ, M. T. V.; MACHADO, J. A. C. *Polo Industrial de Manaus (PIM): a medida de seu valor adicionado comparado ao resto do Brasil. In: Congresso Brasileiro de Economia, 2013, Manaus. Anais do XX Congresso Brasileiro de Economias, CBE 2013, Manaus - Amazonas, 2013.*

SILVA, R. R. da. *O Pólo Industrial de Manaus avaliado como modelo de desenvolvimento econômico sob o enfoque da Lei de Kaldor-Verdoorn. Dissertação (Mestrado em Planejamento do Desenvolvimento). Universidade Federal do Pará. 2006.*

SILVA, L. A. e S *et al.* *Análise do modelo zona franca de Manaus com base nas teorias de desenvolvimento regional. Desenvolvimento Regional: Processos, Políticas e Transformações Territoriais Santa Cruz do Sul, RS, Brasil, 2019.*

SOUZA, N. de J. *Desenvolvimento econômico. 5ª. Ed. São Paulo: Atlas S/A. 2005.*

SUFRAMA. *Indicadores de Desempenho do Polo Industrial de Manaus. 1988-2010. 2013.*

ZILL, D. *Equações diferenciais. São Paulo: Makron Books, 3ª Ed., 2001*

