

Escolha ótima do monopolista discriminador de preços de segundo grau¹

Resumo: Inúmeras indústrias adotam a estratégia de ofertar pacotes com unidades de um determinado produto a preços diferenciados por unidade, por analogia podemos analisar o tamanho do pacote como nível de qualidade do produto ou serviço. Esta política de preços por quantidade é denominada como discriminação de preços de segundo grau ou discriminação de preços não-linear. Neste artigo se apresenta o problema de escolha ótima da firma monopolista discriminadora de preços com dois consumidores sob condições gerais e de forma diagramática e analítica para demandas lineares bem comportadas.

Palavras-chave: Monopolista; discriminação preços de segundo grau; autosseleção.

Abstract: *Countless industries embrace the strategy of offering packages with units of a given good at different prices per unit, by analogy we can analyze the size of the package as the level of quality of the product or service. This quantity pricing policy is called second-degree price discrimination or nonlinear price discrimination. In this paper, the problem of optimal choice of the monopoly price-discriminating firm with two consumers is presented under general conditions and in a diagrammatic and analytical way for well behaved linear demands.*

Keywords: *Monopoly; second-degree price discrimination; self-selection.*

Classificação JEL: C02; C61; L11; L12.

Adriano de Amarante²

Amanda de Oliveira Marques³

Gabriel Coutinho de Amarante⁴

¹ Os autores agradecem à FAPESC pelo apoio financeiro, ao GEA pela possibilidade de desenvolver este trabalho e à UDESC pelo suporte e estrutura física no desenvolvimento desta e de outras pesquisas.

² Professor do Curso de Ciências Econômicas da ESAG-UDESC. Endereço residencial: Rua Sebastião Laurentino da Silva, 126, apto 208, Córrego Grande, Florianópolis-SC. CEP 88037-400.
E-mail: adriano.amarante@udesc.br

³ Aluna Bolsista de Iniciação Científica do Curso de Ciências Econômicas da ESAG-UDESC.
E-mail: amanda.marques4242@edu.udesc.br

⁴ Aluno Bolsista de Iniciação Científica do Curso de Ciências Econômicas da ESAG-UDESC.
E-mail: gabriel.amarante@edu.udesc.br

1.Introdução

Inúmeras indústrias adotam a estratégia de ofertar pacotes com unidades de um determinado produto a preços diferenciados por unidade, por analogia podemos analisar o tamanho do pacote como nível de qualidade do produto. Esta política de preços por quantidade é denominada como discriminação de preços de segundo grau ou discriminação de preços não-linear. Cabe destacar que o termo produto, abrange o significado de mercadoria, bem ou serviço.

Na discriminação de preços de primeiro grau a empresa conhece o quanto cada consumidor está disposto a pagar por cada unidade do produto e cobra o preço máximo a cada unidade para um determinado consumidor, também conhecida como discriminação perfeita de preços. Mas-Collel, Whinston e Green (1995, p.386-387) apresentam um problema simples, em que o monopolista maximiza lucro dado pela soma do valor utilidade de cada consumidor em relação ao consumo de seu produto descontado do custo total.

Por outro lado, a discriminação de terceiro grau não se sabe o quanto o consumidor está disposto a pagar, o monopolista conhece características que permitem separar consumidores em grupos diferentes e cobra preços diferentes de cada grupo de consumidores.

Já a discriminação de preços de segundo grau não se consegue classificar os consumidores em grupos, então, é preciso estratégias para precificar produtos e serviços por quantidade. A formação de pacotes por quantidade devem provocar autosseleção por parte dos consumidores. Assim, consumidores mais propensos à pagar devem consumir um pacote maior e os menos propensos à pagar devem consumir um pacote menor.

Livros textos de microeconomia, Varian (1992, 2016) e de política microeconômica, Friedman (1984), apresentam de forma diagramática a estratégia de discriminação de preços de segundo grau, também conhecida como discriminação de preços não-linear. A apresentação gráfica é para o caso linear e de forma analítica para o caso geral. No caso linear utiliza-se geometria analítica básica para demonstrar a lacuna a ser preenchida ao montar uma função lucro a ser maximizada sem restrição e com uma variável de decisão. Cabe ressaltar que o estudo de discriminação de preços não se restringe à estrutura de oferta monopolista.

Para exemplificar, frequentemente, as empresas de distribuição de energia praticam a discriminação de preços de 2º, já que preços diferentes são cobrados por “pacotes” com diferentes quantidades, ou seja, a energia elétrica fornecida por linhas de alta tensão (entre 13 e 240 kilovolts) para o consumidor industrial no mercado livre de energia no Brasil tem um preço do kWh inferior ao preço unitário do kWh cobrado das unidades consumidoras residenciais. Neste caso o pacote de energia elétrica fornecido para um consumidor industrial contem um grande “volume” de energia elétrica enquanto um consumidor residencial recebe um fluxo de corrente elétrica em linhas de baixa tensão (entre 110 e 220 volts), por isso, a grande maioria dos consumidores industriais compram no atacado e os residenciais compram no varejo.

Ekelund Jr. (1970) aponta que os exemplos de discriminação de preços se aplicam quase sempre a monopólios em transporte e serviços de utilidade pública. Além disso, recorre a história do pensamento econômico indicando que nos escritos sobre discriminação de preços de Dupuit entre 1844-1866, onde este autor, enfatiza a despreocupação de Cournot sobre a conduta de discriminação de preços na sua teoria sobre Monopólio e Duopólio. Assim, desde as observações feitas por Ekelund Jr. (1970) sobre escritos de Dupuit a quase meio século, a pesquisa sobre discriminação avança. Nas últimas duas décadas observa-se um aumento no interesse em estudar temas que

envolvem estratégias de discriminação de preços. Nahata e Ringbom (2007) propõe um modelo de comportamento monopolista de discriminação de preços de 3º e 2º grau simultaneamente aplicado a dois grupos de consumidores, o primeiro grupo chamado de heterogêneo aplica-se um preço linear e ao segundo grupo chamado de homogêneo cobra-se um valor por um pacote de quantidade. Esteves e Reggiani (2014) analisam os efeitos elasticidade preço da demanda na conduta com base na discriminação de preços, onde os preços são dinâmicos, em um modelo com duas firmas que competem em dois períodos e enfrentam a demanda de um grande número de consumidores. As condutas derivadas das elasticidades resultam em níveis diferentes de bem estar geral e de cada agente.

Outros estudos de discriminação de preços a partir de modelos de oligopólio, podem ser indicados para estudos futuros, como em Borenstein (1985), que estuda a discriminação de preços com livre entrada de firmas, Holmes (1989) e Corts (1998) estudam discriminação de preços de 3º grau e seus efeitos e extensões, Hazledine (2006) apresenta um modelo de oligopólio com conduta de discriminação perfeita de preços sugerindo que companhias aéreas discriminam preço com base na distância entre a data de compra da passagem e do embarque, o resultado é um equilíbrio tipo Cournot-Nash. Ainda aplicado a companhias aéreas, Kutlu (2009) estuda os efeitos da discriminação de preços de 2º grau a partir de um modelo na estrutura de um duopólio de Stackelberg.

O objetivo neste *paper* é analisar o comportamento discriminador de preços de segundo grau de um monopolista utilizando uma explicação gráfica vinculada com uma demonstração analítica via um problema de otimização, para tornar o entendimento do tema acessível aos alunos de microeconomia. Para alcançar o objetivo apresentam-se pressupostos, definições e resultados para o caso geral e, em especial, uma solução do modelo de discriminação de preços de segundo grau para o caso de dois consumidores com propensões a pagar lineares. Assim, tais resultados podem servir de base para aplicações em outros modelos com diferentes estruturas de mercado.

Este trabalho apresenta o modelo básico de discriminação de preços não-linear ou de 2º grau. Na segunda a seção são apresentados os pressupostos, definições e resultados da escolha do consumidor a partir de sua utilidade indireta que depende do valor do pacote e do preço unitário de cada produto que compõe o pacote. Na terceira seção apresenta-se a condição de maximização de lucro do monopolista discriminador de preços por quantidade para dois pacotes destinado para dois consumidores. Na quarta seção apresenta-se um modelo simples de um monopolista maximizador de lucro que pratica discriminação de preços de 2º que enfrenta o problema de escolha do pacote com viés de autosseleção para propensões a pagar lineares de dois tipos de consumidores. Por último, propõe-se algumas extensões ao modelo básico e discussões empíricas

2. Escolha do consumidor e pacotes por quantidade

Os consumidores podem apresentar diferentes propensões a pagar e diferentes preferências por quantidades ou qualidade, assim provavelmente, consumidores com uma renda alta estão dispostos a adquirir uma qualidade melhor e/ou um pacote de quantidade do produto maior, enquanto aqueles de renda baixa, tem sua propensão a consumir uma qualidade inferior e/ou uma quantidade é menor. O consumidor procura fazer uma avaliação relativa de cada pacote, logo o valor utilidade indireta (valor máximo atingível pela função de utilidade dado um conjunto de preços κ e p e renda m) atribuído ao pacote de unidades do produto depende do valor atribuído a cada unidade inserida no pacote.

$$v = v(\kappa(x), p(x), m) \quad (1)$$

Onde, κ é preço do pacote, p o preço unitário do produto, m a renda do consumidor e x a quantidade do produto. Alguns pressupostos sobre $v(\kappa(x), p(x), m)$.

1. $0 \leq v(\kappa, m) \leq +\infty$, onde $\frac{\partial v}{\partial \kappa} < 0$, $\frac{\partial v}{\partial p} < 0$, $\frac{\partial \kappa}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$.
2. Condições de convexidade e concavidade, $\frac{\partial^2 v}{\partial \kappa^2} < 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} < 0$, $\frac{\partial^2 \kappa}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} > 0$.
3. Os limites de $v(\kappa, p, m)$: $\lim_{m \rightarrow \infty} v(\kappa, p, m) = +\infty$, para avaliações não nulas de κ
 $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} v(\kappa, p, m) = \bar{\kappa}$ e $\lim_{p \rightarrow \infty} v(\kappa, p, m) = 0$.

Assim, o consumidor apresenta a seguinte restrição orçamentária na compra do produto:

$$v(\kappa, p, m) \leq \eta m \quad (2)$$

Onde $0 < \eta < 1$ é parcela do orçamento dedicada ao consumo do produto x .

A partir desta restrição, o consumidor típico resolve o seguinte problema de maximização de utilidade em relação a variável de escolha x :

$$\max_x v(\kappa, p, m) - \eta m$$

Como temos apenas uma variável de decisão a condição de primeira ordem (CPO) será dada por:

$$\frac{\partial v}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \kappa}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p}}{\frac{\partial v}{\partial \kappa}} < 0 \quad (3)$$

Resultado adicional derivado da condição (3):

$$\frac{\partial v}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial \kappa}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial \kappa}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial x} = \frac{\partial \kappa}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} > 0$$

Uma proposição derivada da equação (3) é que quanto menor (maior) o preço unitário maior (menor) o valor do pacote. Essa relação inversa deriva do pressuposto 1, na medida que o valor do excedente (utilidade indireta) reduz com o aumento do preço do pacote e com o aumento do preço unitário, *ceteris paribus*. Este resultado reforça a ideia de que, quanto maior (menor) o pacote, maior (menor) seu valor e menor (maior) o preço unitário de cada unidade do produto que compõe o pacote.

Um outro resultado interessante, mas que não depende do arbitrio do consumidor é o quanto mudaria o valor da utilidade indireta de consumir x mediante uma mudança marginal na renda:

$$\frac{\partial v}{\partial m} - \eta = 0 \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial m} = \eta > 0 \quad (5)$$

Neste resultado verifica-se que a mudança positiva (negativa) em v equivale a parcela η de cada unidade monetária a mais (ou a menos) na renda.

3 Maximização de lucros do monopolista discriminador de preços por quantidade

Agora, tome um produtor monopolista vendendo para dois tipos de consumidores com propensões a pagar diferentes, tais propensões derivam de suas utilidades indiretas:

$$\begin{aligned}v_1 &= v_1(\kappa_1(x_1), p_1(x_1), m_1) \\v_2 &= v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2)\end{aligned}$$

Referente as utilidades indiretas, assume-se os seguintes pressupostos:

1. Como $x_1 > x_2$ então $\kappa_1 > \kappa_2$.
2. Os domínios de $v_1(\kappa_1(x_1), p_1(x_1), m_1)$ e de $v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2)$ são dados por $x_2 \in \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 \leq x \leq \bar{x}_2\}$ e $x_1 \in \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 \leq x \leq \bar{x}_1\}$, respectivamente, onde $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$.
3. Assuma que, para $x_1 = x_2 = x$, temos que

$$v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2) < v_1(\kappa_1(x_1), p_1(x_1), m_1)$$

Para uma função custo crescente e convexa, temos que $C(x_2) \ll C(x_1) \ll C(x_1 + x_2)$ para qualquer $x = x_1 + x_2$, logo o custo marginal $c(x) \geq c(x_1) \geq c(x_2)$, que pode ser denotado por $c \geq c_1 \geq c_2$.

A partir destas hipóteses o monopolista maximizaria seu lucro se pudesse cobrar o equivalente à v_1 dos consumidores tipo 1 e v_2 dos consumidores do tipo 2 menos o custo total em produzir $x^* = x_1^* = x_2^*$ que equivalem ao nível de produção que maximiza os excedentes dos consumidores a serem extraídos pelo monopolista. A função lucro pode ser dada por:

$$\pi = v_1(\kappa_1(x_1), p_1(x_1), m_1) + v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2) - C(x_1 + x_2) \quad (6)$$

Quando a disposição a pagar por uma unidade adicional do produto se igualar ao custo marginal, c , em cada mercado temos as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \kappa_1} \frac{d\kappa_1}{dx_1^*} + \frac{\partial v_1}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dx_1^*} = c_1 = \frac{dC(x_1^* + x_2^*)}{dx^*} \frac{dx^*}{dx_1^*} = \frac{dC(x^*)}{dx^*} = c \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \kappa_2} \frac{d\kappa_2}{dx_2^*} + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} \frac{dp_2}{dx_2^*} = c_2 = \frac{dC(x_1^* + x_2^*)}{dx^*} \frac{dx^*}{dx_2^*} = \frac{dC(x^*)}{dx^*} = c \quad (8)$$

No entanto, a hipótese 3 não assegura que os consumidores do tipo 1 decidam pagar $v_1(x_1)$ dado que o monopolista tem a viabilidade de oferecer um pacote com quantidade x_2 ao valor $v_2(x_2) < v_1(x_2)$, que possibilita um excedente de $v_1(x_2) - v_2(x_2)$ aos consumidores do tipo 1 ao comprar um pacote de quantidade menor, x_2 , ao valor, v_2 .

Neste caso, o monopolista maximiza o lucro sujeito ao excedente que estimule a autosseleção (mecanismo que afirma que se o contrato for "bem desenhado", o consumidor de demanda alta irá adquirir o maior pacote, assim como o consumidor de demanda baixa irá consumir o pacote menor) por parte dos consumidores do tipo 1 em adquirir um pacote de quantidade maior, que deve completar o pacote com as quantidades adicionais $x_1 - x_2$ que devem ser avaliadas em $v_1(\kappa_1(x_1), p_1(x_1 - x_2), m_1)$. Assim, a expressão do lucro assumindo que custo marginal, $c_2 = c_1 = 0$:

$$\begin{aligned}\pi &= v_1(\kappa_1(x_1), p_2(x_2), m_1) - E_1(x_2) + v_1(\kappa_1(x_1), p_1(x_1 - x_2), m_1) \\ &\quad + v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2)\end{aligned} \quad (9)$$

Dado que

$$E_1(x_2) \geq v_1(\kappa_1(x_1), p_2(x_2), m_1) - v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2) \quad (10)$$

Logo, sob uma condição de fronteira, a função lucro pode ser dada por:

$$\pi = v_1(\kappa_1(x_1), p_2(x_2), m_1) - [v_1(\kappa_1(x_1), p_2(x_2), m_1) - v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2)] + v_1(\kappa_1(x_1), p_1(x_1 - x_2), m_1) + v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2) \quad (11)$$

Ou melhor:

$$\pi = v_1(\kappa_1(x_1), p_1(x_1 - x_2), m_1) - 2[v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2)] \quad (12)$$

O problema de maximização do monopolista passa a ser:

$$\max_{x_2} \{v_1(\kappa_1(x_1), p_1(x_1 - x_2), m_1) - 2[v_2(\kappa_2(x_2), p_2(x_2), m_2)]\}$$

CPO:

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dx_2} = 2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \kappa_2} \frac{d\kappa_2}{dx_2} + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} \frac{dp_2}{dx_2} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dx_2} = 2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial p_2} \frac{dp_2}{dx_2} - \left| \frac{\partial v_2}{\partial \kappa_2} \frac{d\kappa_2}{dx_2} \right| \right) \quad (14)$$

Como proposição resultante, a quantidade de produto no pacote 2, x_2 , para qualquer pacote de quantidades inferiores a \bar{x}_2 de valor $v_2(x_2)$ será preferível ao consumidor do tipo 1 frente a opção de um pacote com quantidades x_1 ao valor $v_1(x_1)$, quando

$$v_2'(x_2) \leq \frac{1}{2} v_1'(x_2)$$

Na presença de custo marginal não nulo, tem-se que:

$$v_2'(x_2) \leq \frac{1}{2} [v_1'(x_2) + c]$$

$$2v_2'(x_2) - c \leq v_1'(x_2)$$

Quando o ganho ou excedente adicional obtido na compra do pacote 2 por parte do consumidor do tipo 1 for equivalente a metade do excedente na compra do pacote 1 descontado do custo marginal, a autoseleção se estabelece e o consumidor do tipo 1 escolhe racionalmente o pacote 1.

4. Modelo de discriminação de preços de 2º grau e autoseleção

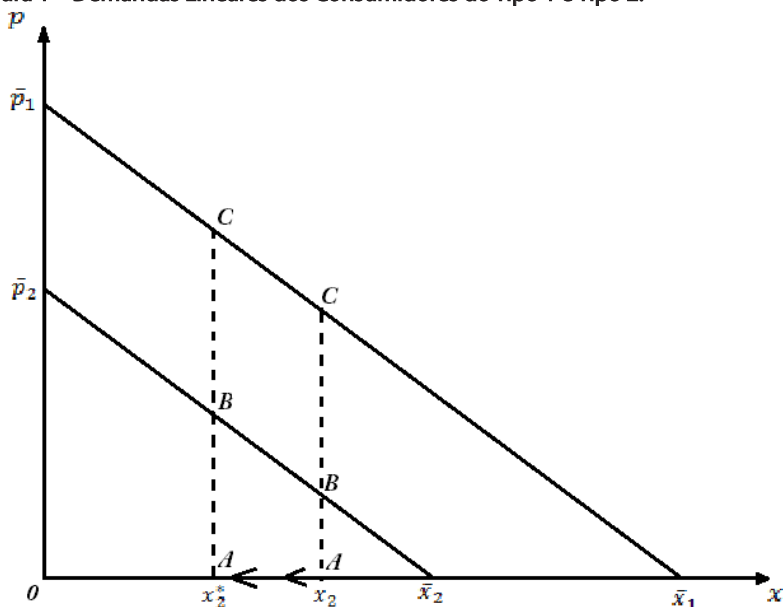
Uma extensão da teoria do monopólio é o estudo das possibilidades de estratégias de vinculação de preços quando os bens são complementares, de diferenciação de produtos e serviços e de discriminação de preços. Nesta última, a discriminação de preços não-linear ou de 2º grau é um dos três possíveis comportamentos de discriminação de preços por parte do monopolista. Na discriminação de preços de 2º grau, a firma monopolista define pacotes de quantidades com valores diferentes e preços unitários diferentes para cada pacote. No caso da determinação do valor a ser cobrado por cada pacote, o monopólio deve observar a propensão a consumir de cada consumidor. Neste modelo simples, tem-se como pressupostos:

1. Nesta economia existem dois consumidores, com diferentes propensões marginais a pagar. O consumidor 2 tem alta propensão a consumir o produto x (grupo de demanda alta) e o consumidor 1 tem baixa propensão a consumir (grupo de demanda baixa).
2. Generalizando para demandas lineares inversas (propensões marginais a pagar) dado que $i=1,2$: $p_i = p_i(x)$, onde $p_i(0) = \bar{p}_i$, $\bar{p}_1 < 2\bar{p}_2$ e $p_i(\bar{x}) = CMg(\bar{x}_i)$ logo, tem-se o grupo 1 de consumidores com demanda alta e o 2 com demanda baixa.

3. O monopolista cobra um preço $\kappa_2 = v(p(x_2), m)$ pelo pacote $0 \leq x_2 \leq \bar{x}_1$, de modo a extrair todo o excedente dos consumidores do tipo 2.
4. O monopolista maximiza seu lucro escolhendo x_2 ótimo que assegura a autosseleção por parte dos dois tipos de consumidores.
5. Nesta economia existem dois tipos de consumidores, $i=1,2$, com demandas lineares, como no *pressuposto 1* e custo marginal igual a zero.

Neste caso a ideia é fixar a quantidade em \bar{x}_1 referente a quantidade destinada ao consumidor 1 e escolher a quantidade x_2 que leve a autosseleção por parte dos dois consumidores e que leva a maximização de lucro do monopolista discriminador de preços por quantidade.

Figura 1 – Demandas Lineares dos Consumidores do Tipo 1 e Tipo 2.



Fonte: Elaboração própria.

Proposição 1: Na Figura 1, a quantidade x_2^* que compõe o pacote destinado ao consumidor 2 será determinada quando a distância AB for igual a BC , diferente da estratégia anterior, x_2 , escolhida pelo monopolista em que a distância AB é menor que BC . Quando $x_2 < x_2^*$ o benefício marginal líquido (lucro adicional) passa a ser negativo, $BC - AB < 0$, ou seja, $BC < AB$. Cabe lembrar que para existir a oferta de um pacote de quantidade maior que zero para o consumidor 2, faz-se necessário respeitar a restrição $\bar{p}_1 < 2\bar{p}_2$.

A condição que maximiza o lucro do monopólio é dada por:

$$p_2(x_2^*) = \frac{1}{2} p_1(x_2^*)$$

Pode ser interpretada como aquela em que o valor adicionado cobrado do consumidor 2, ao ampliar o pacote x_2 em uma unidade, deve ser equivalente ao valor perdido pela redução no preço κ_1 para assegurar a autosseleção por parte do consumidor do tipo 1.

Prova da Proposição 1: Tome a função de lucro do monopolista expressa pelas disposições a pagar pelo produto x como:

$$\pi^m = 2 \left[\underbrace{\frac{(\bar{p}_2 - p_2(x_2))x_2}{2} + p_2(x_2)x_2}_{2 \text{ vezes a Área do Trapézio } 0x_2B\bar{p}_2} \right] + \left[\underbrace{\frac{p_1(x_2)(\bar{x}_1 - x_2)}{2}}_{\text{Área do Triângulo } x_2\bar{x}_1C} \right] \quad (15)$$

ou

$$\pi^m = 2 \left[\underbrace{\frac{(\bar{p}_2 + p_2(x_2))x_2}{2}}_{2 \text{ vezes a Área do Trapézio } 0x_2B\bar{p}_2} \right] + \left[\underbrace{\frac{p_1(x_2)(\bar{x}_1 - x_2)}{2}}_{\text{Área do Triângulo } x_2\bar{x}_1C} \right] \quad (16)$$

O problema de maximização do lucro do monopolista pode ser dado por:

$$\max_{0 \leq x_2 \leq \bar{x}_1} \left\{ 2 \left[\frac{(\bar{p}_2 - p_2(x_2))x_2}{2} + p_2(x_2)x_2 \right] + \left[\frac{p_1(x_2)(\bar{x}_1 - x_2)}{2} \right] \right\}$$

ou

$$\max_{0 \leq x_2 \leq \bar{x}_1} \left\{ 2 \left[\frac{(\bar{p}_2 + p_2(x_2))x_2}{2} \right] + \left[\frac{p_1(x_2)(\bar{x}_1 - x_2)}{2} \right] \right\}$$

tem-se como condição de 1ª ordem (CPO):

$$\begin{aligned} \bar{p}_2 - p_2'(x_2)x_2 - p_2(x_2) + 2p_2'(x_2)x_2 + 2p_2(x_2) + \\ + \frac{p_1'(x_2)\bar{x}_1 - p_1'(x_2)x_2 - p_1(x_2)}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

ou

$$\bar{p}_2 + p_2'(x_2)x_2 + p_2(x_2) = \frac{p_1'(x_2)x_2 - p_1'(x_2)\bar{x}_1 + p_1(x_2)}{2} \quad (18)$$

$$\bar{p}_2 + p_2'(x_2)x_2 + p_2(x_2) = \frac{1}{2} [p_1'(x_2)(x_2 - \bar{x}_1) + p_1(x_2)] \quad (19)$$

Dado que $\bar{p}_2 = -p_2'(x_2)\bar{x}_2$:

$$p_2(x_2) + p_2'(x_2)(x_2 - \bar{x}_2) = \frac{1}{2} [p_1(x_2) + p_1'(x_2)(x_2 - \bar{x}_1)] \quad (20)$$

Onde $p_1'(x_2)$ e $p_2'(x_2)$ é a derivada das demandas lineares inversas (propensões marginais a pagar) dos consumidores do tipo 1 e do tipo 2 em relação a quantidade x_2 de produto no pacote 2. Como as tangentes dos ângulos dos vértices \bar{x}_1 e \bar{x}_2 podem ser determinadas por $p_1'(x_2)$ e $p_2'(x_2)$ como o negativo da razão Cateto Oposto por Cateto Adjacente, onde $|x_2 - \bar{x}_1|$ e $|x_2 - \bar{x}_2|$ são os catetos adjacentes, então obtemos:

$$\begin{aligned} p_1'(x_2)(x_2 - \bar{x}_1) &= p_1(x_2^*) \\ p_2'(x_2)(x_2 - \bar{x}_2) &= p_2(x_2^*) \end{aligned}$$

Logo obtem-se que:

$$\begin{aligned} p_2(x_2^*) + p_2(x_2^*) &= \frac{1}{2} [p_1(x_2^*) + p_1(x_2^*)] \\ p_2(x_2^*) &= \frac{1}{2} p_1(x_2^*) \end{aligned} \quad (21)$$

■

Agora, na ausência da oferta de pacote para consumidores do tipo 2 assumi-se que $\bar{p}_2 \leq \frac{1}{2}\bar{p}_1$ para demandas lineares, então $x_2^* = 0$, assim:

$$\bar{p}_2 + p_2'(0)0 + p_2(0) = \frac{1}{2} [p_1'(0)(0 - \bar{x}_1) + p_1(0)] \rightarrow 2\bar{p}_2 = \frac{1}{2} [\bar{p}_1 - p_1'(0)\bar{x}_1] \quad (22)$$

Dado que $\bar{x}_1 = \frac{\bar{p}_1}{-p_1'(x_2)}$ e para qualquer $0 \leq x_2 \leq \bar{x}_1$ tem-se $p_1(x_2) = p_1(0) = p_1(\bar{x}_1)$, tem-se:

$$2\bar{p}_2 = \bar{p}_1 \quad (23)$$

■

A equação (23) é uma condição de fronteira do conjunto, $\bar{p}_2 \leq \frac{1}{2}\bar{p}_1$ ao qual o monopolista não terá incentivo a ofertar o pacote x_2 de menor quantidade.

5. Discussões finais

A literatura aponta que um dos resultados mais importantes é a estratégia de incentivo à autosseleção, através desta estratégia, a empresa monopolista escolhe uma quantidade para compor o pacote menor, com o objetivo de desestimular o consumidor de alta propensão a pagar a escolher este pacote. Algumas vezes, o monopolista reduz a quantidade de bens ou serviços destinados aos consumidores de menor propensão até que os consumidores de alta propensão desistam do pacote de baixa qualidade e optem pelo pacote de alta quantidade (qualidade).

A discriminação de preços por quantidade ou qualidade pode ser aplicada à prestação de serviços de conteúdo e análise financeira, pacotes de produtos em que seu preço pode ser determinado mediante frequência de busca, serviços de ensino em geral, pacotes de assinatura de revistas e jornais *on-line*, serviços de *stream* que podem estar associados a um pacote de serviços de operadoras de telefonia móvel, *softwares* com funções básicas para os curiosos e pouco interessados e com várias possibilidades de funções dedicadas ao uso técnico de cientistas, profissionais e consultores motivados ao uso.

O conjunto de proposições, demonstrações e resultados devem servir para uma compreensão maior sobre o tema e auxiliar estudos futuros aplicados a outras estruturas de mercado, como nos modelos de duopólio de Cournot, Bertrand e Stackelberg e suas variações e extensões.

Referências

- BORENSTEIN, S. Price discrimination in free-entry markets. *RAND Journal of Economics*. 16, p. 380-397, 1985.
- CORTS, K. Third-degree price discrimination in oligopoly: All-out competition and strategic commitment. *RAND Journal of Economics*. 29, p. 306-323, 1998.
- ESTEVES, Rosa-Branca; REGGIANI, Carlo. Elasticity of demand and behaviour-based price discrimination. *International Journal of Industrial Organization*. 32, p. 46-56, 2014.
- EKELUND Jr, Robert B. Discrimination and Product Differentiation in Economic Theory: An early analysis. *Quarterly Journal of Economics*. 84, p. 268-278, 1970.
- FRIEDMAN, Lee S. Microeconomic Policy Analysis. In *Economics Handbook Series*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

HAZLEDINE, Tim. Price discrimination in Cournot-Nash oligopoly. *Economics Letters*. 93, p. 413-420, 2006. doi: 10.1016/j.econlet.2006.06.006

HOLMES, T. J. The effects of third-degree price discrimination in oligopoly. *American Economic Review*. 79, p. 244-250, 1989.

KUTLU, Levent. Price discrimination in Stackelberg competition. *Journal of Industrial Economics* 57, p. 364-368, 2009. doi: 10.1111/j.1467-6451.2009.00382.x

NAHATA, Babu; RINGBOM, Staffan. Price discrimination using linear and nonlinear pricing simultaneously. *Economics Letters*. 95, p. 267-271, 2007. doi: 10.1016/j.econlet.2006.10.018

MAS-COLLEL, Andreu; WHINSTON, D. Michael; GREEN, Jerry R. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press, 1995.

VARIAN, Hal R. *Microeconomic Analysis*. 3ª ed., New York: W. W. Norton & Company, 1992.

VARIAN, Hal R. *Intermediate Microeconomics*. 9ª ed., New York: W. W. Norton & Company, 2014.