

Verificação empírica da lei de Zipf a partir do método de regressão quantílica para cidades brasileiras

Empirical verification of Zipf's law using the quantile regression method for Brazilian cities

Resumo: Este estudo examina a validade empírica da Lei de Zipf na distribuição do tamanho das cidades brasileiras entre 1950 e 2001, utilizando dados censitários e técnicas de regressão quantílica, incluindo regressão quantílica simultânea. A Lei de Zipf estabelece uma relação de proporcionalidade inversa entre o tamanho urbano e sua posição no ranking, implicando uma distribuição de potência com expoente unitário. Os resultados indicam que, em grande parte do período — especialmente entre 1950 e 1980 — os coeficientes estimados de Pareto permanecem abaixo do valor teórico, indicando ausência de conformidade plena com a lei, além de forte primazia urbana e acentuadas assimetrias regionais. No entanto, os censos de 1991 e 2001 revelam maior convergência nos quantis centrais, com coeficientes próximos ao expoente unitário, sugerindo uma tendência recente à regularidade zipfiana. Esses achados indicam um maior equilíbrio relativo no sistema urbano brasileiro diante das transformações estruturais ocorridas na década de 1990.

Palavras-chave: Economia Urbana e Regional; Lei de Zipf; Tamanho e Distribuição Espacial da Atividade Econômica Regional.

Abstract: *This study examines the empirical validity of Zipf's Law in the distribution of Brazilian city sizes between 1950 and 2001, using census data and quantile regression techniques, including simultaneous quantile regression. Zipf's Law posits an inverse proportional relationship between city size and its rank, implying a power-law distribution with a unitary exponent. The results indicate that, for most of the period—particularly from 1950 to 1980—the estimated Pareto coefficients fall below the theoretical benchmark, reflecting a lack of full conformity with the law, as well as pronounced urban primacy and substantial regional asymmetries. However, the 1991 and 2001 censuses show stronger convergence in the central quantiles, with coefficients approaching the unitary exponent, suggesting a recent movement toward Zipfian regularity. These findings point to a shift toward greater relative balance within the Brazilian urban system, associated with the structural economic and territorial transformations that occurred during the 1990s.*

Keywords: *Urban and Regional Economics; Zipf's Law; Size and Spatial Distributions of Regional Economic Activity.*

Classificação JEL: R10; R12; F15.1; C21.

Jorge Alberto Orellana Aragón¹

Vivian dos Santos Queiroz Orellana²

¹ Professor do Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada (PPGE) do Instituto de Ciências Econômicas, Administrativas e Contábeis (ICEAC) da Universidade Federal do Rio Grande (FURG).
E-mail: jorgeorellana@furg.br

² Professora do Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada (PPGE) do Instituto de Ciências Econômicas, Administrativas e Contábeis (ICEAC) da Universidade Federal do Rio Grande (FURG).
E-mail: vivianqueiroz@furg.br

1. Introdução

O estudo dos sistemas de cidades constitui um campo central na economia urbana, na geografia econômica e no planejamento territorial. A análise da distribuição do tamanho das cidades e da sua organização hierárquica oferece importantes subsídios para compreender os padrões de urbanização, os fluxos migratórios, as decisões de localização de atividades econômicas e a eficiência da alocação espacial de recursos. Desde os trabalhos pioneiros de Christaller (1933) sobre a teoria dos lugares centrais e a formulação da Lei de Zipf para as cidades por George R. Zipf (1949), os sistemas urbanos têm sido objeto de intenso debate acadêmico, especialmente em contextos de industrialização acelerada, transição demográfica e reestruturação econômica.

No caso brasileiro, a relevância desse tema é reforçada por três características centrais: (i) a vasta extensão territorial e a profunda heterogeneidade regional do país; (ii) a urbanização rápida e concentrada ocorrida a partir da segunda metade do século XX; e (iii) as transformações econômicas e institucionais que moldaram a estrutura espacial da economia nacional. Nas últimas seis décadas, o Brasil vivenciou intensos fluxos migratórios interestaduais e inter-regionais, fortemente influenciados pela adoção de um modelo de desenvolvimento baseado na substituição de importações. Esse modelo, consolidado sobretudo entre os anos 1950 e 1980, promoveu a industrialização por meio da proteção ao mercado interno e da concentração de investimentos em regiões selecionadas, como o Sudeste.

Essas transformações tiveram impactos profundos sobre a configuração dos sistemas urbanos. A criação de polos industriais em áreas específicas levou ao fortalecimento de certas cidades em detrimento de outras, alterando a hierarquia urbana tradicional. Paralelamente, a expansão das redes de transporte e comunicação, a abertura comercial dos anos 1990 e o crescimento do comércio inter-regional e internacional impulsionaram novas dinâmicas territoriais. Muitas metrópoles, anteriormente dominantes, passaram a perder participação relativa, enquanto cidades médias e intermediárias ganharam proeminência, refletindo uma possível descentralização do crescimento urbano.

Nesse contexto, o estudo da distribuição do tamanho das cidades brasileiras e da sua evolução ao longo do tempo é fundamental para avaliar o grau de equilíbrio e racionalidade do sistema urbano nacional. A verificação empírica da validade da Lei de Zipf — que postula uma relação de proporcionalidade inversa entre o tamanho das cidades e sua posição no ranking populacional — permite aferir a presença ou ausência de regularidades estatísticas associadas a processos de crescimento urbano eficiente, auto-organizado ou desequilibrado. Além disso, a Lei de Zipf oferece uma referência teórica para discutir a centralização ou dispersão do crescimento urbano e para orientar políticas públicas voltadas ao ordenamento territorial, à integração regional e à promoção de um desenvolvimento urbano mais inclusivo e sustentável.

O objetivo deste artigo é testar empiricamente a validade da Lei de Zipf no contexto brasileiro, com foco na distribuição do tamanho das cidades entre 1950 e 2001. Para isso, são empregadas regressões quantílicas e técnicas de regressão por quantis simultâneos, que permitem analisar variações ao longo da distribuição condicional. Complementarmente, utiliza-se uma abordagem baseada em funções de densidade não paramétricas de Kernel, com o intuito de oferecer uma representação mais flexível da evolução da estrutura urbana. Ao reunir essas abordagens, busca-se contribuir para a literatura empírica sobre sistemas urbanos em países em desenvolvimento e oferecer subsídios relevantes ao debate sobre políticas territoriais no Brasil.

2. Revisão da literatura

As contribuições metodológicas em nível internacional na literatura sobre a Lei de Zipf têm início com Berry (1961), que apresenta uma tipologia comparativa inovadora — rank-size, primate e intermediário. Vining (1976) introduz a autocorrelação no modelo de Gibrat, generaliza a derivação da Lei de Zipf e analisa a velocidade de convergência e a estabilidade da distribuição urbana. Em seguida, Rosen e Resnick (1980) demonstram a importância da sensibilidade das estimações a diferentes definições de “cidade” e tamanhos de amostra. Gabaix (1999) propõe a formalização matemática da Lei de Zipf por meio de processos de Markov e de difusão estocástica. Krugman (1996) revisa e compara três tradições — modelos de sistemas urbanos (Henderson), teoria dos lugares centrais (Christaller, Lösch e Fujita) e modelos de crescimento aleatório (Simon) — e sugere alternativas, como os modelos de percolação, enfatizando paisagens heterogêneas e vantagens naturais (portos e rios).

Overman e Ioannides (2000) aplicam, de forma pioneira, kernels estocásticos e desenvolvem novos indicadores de mobilidade intra-distribuição. Reed (2001) apresenta a distribuição “dupla de Pareto” como uma solução estocástica unificada. Lai (2001) realiza uma revisão crítica dos modelos probabilísticos (Simon, Gabaix e Córdoba), destacando suas limitações metodológicas. Batty e Shiodé (2001) introduzem o uso da Havlin matrix, que mede as mudanças relativas de rank ao longo do tempo, permitindo identificar transições e descontinuidades em sistemas que, no agregado, aparentam estabilidade; essa abordagem estatística possibilita comparar trajetórias temporais e revelar reordenações ocultas.

Ioannides e Overman (2003) introduzem a aplicação inovadora de métodos não paramétricos. Gabaix e Ioannides (2003) conferem maior rigor econométrico, com o uso do Hill estimator, simulações e foco no ajuste, em vez de testes binários. Soo (2002) compara OLS e o estimador de Hill, evidenciando vieses importantes. Rossi-Hansberg e Wright (2003) propõem um modelo urbano-macroeconômico que reconcilia retornos crescentes locais com crescimento balanceado. Nishiyama e Osada (2004) fornecem fundamentação estatística às regressões rank-size, corrigindo problemas do OLS e do teste t. Eeckhout (2004) rompe com abordagens anteriores que analisavam apenas grandes cidades, utilizando todas as localidades urbanas dos EUA. Nitsch (2005) aplica, de forma pioneira, a meta-análise — com 515 estimativas provenientes de 29 estudos — para sintetizar resultados sobre a Lei de Zipf. Rose (2005) emprega métodos de análise urbana (Zipf/Gibrat/log-normalidade) em escala internacional, com ampla base temporal e comparativa. Hinloopen e Van Marrewijk (2006) analisam a regularidade empírica em três dimensões independentes — tempo (1970–1997), países (166) e setores (747) — e em três níveis de agregação (2, 3 e 4 dígitos). Córdoba (2008) desenvolve um modelo matemático para explicar as distribuições de tamanho das cidades, investigando se a Lei de Zipf pode emergir de mecanismos simples de crescimento e alocação populacional. Hsu (2010) apresenta uma formalização rigorosa da teoria dos lugares centrais, incorporando microfundamentos, fractalidade e condições para a lei de potência.

Por fim, Berry e Okulicz-Kozaryn (2011) reposicionam o debate: a questão não é “Zipf ou lognormal?”, mas sim a definição adequada das unidades urbanas. Modica, Reggiani e Nijkamp (2015) propõem uma estrutura inovadora que conecta as leis de Gibrat e de Zipf em um mesmo quadro analítico e estatístico. Clemente et al. (2011) aplicam uma combinação de métodos paramétricos — como estimações via regressão log-log para obter o parâmetro de Pareto (Zipf) e regressões lineares para testar a independência entre crescimento e tamanho (Gibrat) — e não paramétricos, com o uso de kernels adaptativos (Nadaraya-Watson).

No caso da literatura brasileira, quanto à metodologia, Higachi e Prates (2008),

Miranda e Badia (2006), Magalhães, Toscano e Bergamaschi (2010) e Machado Ruiz (2004) indicam o uso das versões linear e quadrática (concavidade/convexidade) da regressão rank-size. Amarante (2011), Ribeiro Justo (2015), Zardo (2010), Zardo e Sartoris (2009) e Borghi (2019) destacam a aplicação das Áreas Mínimas Comparáveis (AMCs) para garantir consistência temporal nas séries históricas. Esses mesmos autores também contribuem com avanços em econometria espacial — como o uso do Índice de Moran, dos modelos SAR e SEM — e com a aplicação de cadeias de Markov para analisar a mobilidade na hierarquia urbana. Moura e Ribeiro (2006) recorrem à máxima verossimilhança, aos mínimos quadrados, a métodos alternativos de estimação de probabilidade e ao log-binning. Já Magalhães, Toscano e Bergamaschi (2010) avaliam ainda o uso de geoprocessamento, ortofotos e do estimador rank- $\frac{1}{2}$ de Gabaix-Ibragimov. Por fim, Resende (2004) inova ao aplicar testes de raiz unitária em painel para verificar a validade da Lei de Gibrat.

Quanto às contribuições empíricas em nível internacional, Auerbach (1913) apresenta a primeira análise empírica e comparativa da concentração populacional. Em seguida, Berry (1961) demonstra que não há relação estatisticamente significativa entre o tipo de distribuição e o nível de urbanização ou de desenvolvimento econômico — contrariando as hipóteses que vinculavam a primazia urbana a uma equivalência com o subdesenvolvimento. Vining (1976) encontra evidências da existência de autocorrelação positiva moderada nas taxas de crescimento das cidades dos EUA, confirmando a robustez da Lei de Zipf mesmo na presença de dependência temporal. Posteriormente, Rosen e Resnick (1980) estimam a lei em 44 países, introduzindo indicadores de primazia urbana e evidências de não linearidade. Krugman (1996) destaca a regularidade da Lei de Zipf nos Estados Unidos e em outros países ao longo de mais de um século, observando que nenhum modelo explica de forma convincente o expoente próximo de 1.

Overman e Ioannides (2000) confirmam a persistência do padrão zipfiano nos Estados Unidos, mas com mobilidade heterogênea entre regiões e hierarquias. Batty e Shiode (2001) apresentam evidências em três níveis: (i) cidades britânicas (1901–1991), com estabilidade global, mas mudanças locais associadas a guerras e à industrialização; (ii) países (1980–2000), cuja distribuição se mostra extremamente estável, quase sem reordenação global; e (iii) difusão de telefones celulares (1980–2000), com forte instabilidade e reorganização no ranking, revelando que sistemas novos e em rápida expansão exibem muito mais turbulência. Lai (2001) assinala que a regularidade sugere mecanismos comuns subjacentes à estrutura urbana global, independentemente de instituições ou níveis de desenvolvimento. Gabaix e Ioannides (2003) reforçam a validade aproximada de Zipf (expoentes entre 0,8 e 1,2), embora com nuances históricas e contextuais. Rossi-Hansberg e Wright (2003) apresentam evidências robustas da Lei de Zipf e de seus desvios, destacando a vinculação entre volatilidade setorial e dispersão urbana. Eeckhout (2004) mostra que seus resultados contrastam com estudos anteriores, que encontravam um expoente Zipf ≈ 1 por analisarem apenas o “topo da cauda” (as maiores cidades). Rose (2005) demonstra que os países seguem a mesma estrutura estatística das cidades, validando as Leis de Zipf e de Gibrat em múltiplos períodos. Hinloopen e Van Marrewijk (2006) demonstram que os setores intensivos em tecnologia e capital humano tendem a apresentar expoentes mais elevados, enquanto os produtos primários exibem distribuições mais homogêneas. Além disso, confirmam que o padrão de vantagem comparativa global segue uma estrutura hierárquica análoga à observada em cidades e firmas — uma evidência empírica inédita. Córdoba (2008) argumenta que a evidência favorável à Lei de Zipf pode refletir limitações de métodos estatísticos ou de definição das unidades urbanas.

Berry e Okulicz-Kozaryn (2011) evidenciam que, nos Estados Unidos, a Lei de Zipf só se confirma quando se utilizam unidades funcionais que incluem megalópoles. Clemente et al. (2011) mostram que a estabilidade na hierarquia migratória — com coeficientes

de Spearman que indicam alta correlação intertemporal (1960–2000) — sugere baixa mobilidade no ranking dos países receptores. Hsu (2010) propõe uma validação indireta por meio da NAS Rule, estabelecendo paralelos com a distribuição de firmas e apontando consistência com novos métodos de definição urbana. Luckstead e Devadoss (2014), utilizando dados das Nações Unidas, confirmam a Lei de Gibrat (1931), mas rejeitam Zipf para megacidades devido a barreiras migratórias. Anderson e Ge (2005) analisam a China e mostram que a distribuição segue um padrão lognormal, e não Zipf, em decorrência de reformas institucionais. Delgado e Godinho (2004) avaliam Portugal (1864–2001), caracterizado por urbanização tardia, dominada por Lisboa e Porto, mas com fortalecimento recente de cidades médias.

Modica, Reggiani e Nijkamp (2015) encontram evidências mistas e dependentes do contexto, reforçando a ideia de uma “Lei de Gibrat generalizada”. González-Val et al. (2024) mostram que, para os Estados Unidos, em nível regional (1900–2010), Zipf é mais estável regionalmente do que nacionalmente. Overman e Ioannides (2000) identificam, para o período de 1900 a 1990, estabilidade relativa, mas com variação do expoente ao longo do tempo. Por fim, Rose (2005) indica que as Leis de Zipf e de Gibrat também se aplicam a países, e não apenas a cidades.

No Brasil, no campo empírico, Moura e Ribeiro (2006) avaliam a validade da Lei de Zipf: confirmada, com corte, no Rio Grande do Sul; parcialmente aceita no Paraná; e rejeitada no Espírito Santo. Monastério (2008) e Machado Ruiz (2004) evidenciam lacunas hierárquicas e a ausência de cidades médias. Ribeiro Justo (2015) e Borghi (2019) apontam crescente concentração e polarização em Minas Gerais. Monastério (2008), no caso do Rio Grande do Sul, assim como Ribeiro Justo (2015), Zardo (2010) e Zardo e Sartoris (2009), assinala uma tendência recente de fortalecimento das cidades médias. Monastério (2012) destaca as distorções institucionais associadas ao Fundo de Participação dos Municípios (FPM). Ribeiro Justo (2015) identifica, em 2010, uma bimodalidade na distribuição, com dois picos de concentração. Já Orellana e Queiroz (2013) evidenciam a validade parcial da Lei de Zipf, a forte primazia das capitais e o crescimento gradual das cidades médias.

Machado Ruiz (2004), Monastério (2008), Amarante (2011), Ribeiro Justo (2015), Zardo (2010) e Borghi (2019) tratam a Lei de Zipf como uma regularidade empírica, e não como uma lei universal. Amarante (2009) e Ribeiro Justo (2015) discutem ainda a Nova Geografia Econômica, enfatizando a tensão entre forças centrípetas e centrífugas. Moura e Ribeiro (2006) introduzem a perspectiva de sistemas complexos e de auto-organização, segundo a qual as cidades interagem de maneira não linear. Oliveira (2004) identifica a validade parcial da Lei de Zipf, com concentração nas metrópoles e difusão posterior para cidades médias. Resende (2004) fornece evidências empíricas consistentes com a hipótese de crescimento proporcional das cidades paulistas. Por fim, Direi (2024) apresenta evidências empíricas sobre as Leis de Gibrat e de Zipf, destacando que “a lei não é uma ‘lei’ justamente por ser uma aproximação estatística”.

No plano das implicações para políticas públicas em nível internacional, Berry (1961) recomenda cautela na interpretação da primazia urbana e defende políticas voltadas à promoção da diversidade e da integração nos sistemas de cidades. Vining (1976) reconhece a persistência das trajetórias urbanas e destaca a necessidade de políticas de longo prazo para alterar hierarquias urbanas, enfatizando a importância de estratégias territoriais consistentes. Krugman (1996) sugere que políticas regionais e de infraestrutura considerem as forças de aglomeração e dispersão, uma vez que a concentração urbana decorre de mecanismos endógenos influenciados por custos de transporte e localização. Overman e Ioannides (2000) ressaltam a necessidade de políticas territoriais diferenciadas e do uso de métricas de mobilidade como benchmarks para avaliar modelos de crescimento urbano. Lai (2001) aponta que as políticas devem reconhecer que a distribuição urbana tende a reproduzir padrões de Pareto, mesmo sem planejamento central. Soo (2002) demonstra que fatores institucionais e políticos — como o gasto

público e a liberdade política — explicam melhor a hierarquia urbana do que variáveis estritamente econômicas. Gabaix e Ioannides (2003) recomendam flexibilidade nas políticas urbanas, levando em conta a volatilidade das cidades pequenas, os choques históricos e os limites do padrão zipfiano. Eeckhout (2004) defende que as políticas de desenvolvimento urbano não devem focar exclusivamente em metrópoles, mas também em fortalecer cidades médias, melhorar a infraestrutura, elevar a produtividade local e promover a integração em redes regionais.

Anderson e Ge (2005) ressaltam o impacto da Política do Filho Único e das reformas institucionais sobre a estrutura urbana chinesa. Delgado e Godinho (2004) relacionam a trajetória portuguesa à democratização pós-1974 e à integração na União Europeia. Rossi-Hansberg e Wright (2003) mostram como a estrutura urbana atua como determinante da produtividade, com implicações para políticas de urbanização, infraestrutura e estabilização macroeconômica. Rose (2005) sugere implicações para a compreensão das desigualdades globais e para os limites da intervenção em estruturas hierárquicas populacionais.

Hinloopen e Van Marrewijk (2006) indicam que as vantagens comparativas reveladas seguem padrões estruturais de concentração e desigualdade, com implicações diretas para políticas comerciais e industriais. Córdoba (2008) argumenta que a distribuição dos tamanhos das cidades depende da estrutura produtiva, de choques históricos e de trajetórias específicas, de modo que as políticas urbanas devem ser contextualizadas. Hsu (2010) oferece um marco teórico para políticas urbanas e industriais, enfatizando a relevância da hierarquia funcional das cidades. Clemente et al. (2011) mostram que países com forte crescimento da densidade migratória enfrentam pressões sobre o mercado de trabalho, a infraestrutura e as políticas de integração.

Luckstead e Devadoss (2014) associam os desvios em relação à Lei de Zipf a restrições migratórias internacionais, com implicações diretas para a mobilidade global. Modica, Reggiani e Nijkamp (2015) defendem cautela no uso das Leis de Zipf e de Gibat como referências universais, ressaltando a necessidade de políticas específicas para cidades pequenas ou grandes, conforme o grau de desigualdade urbana. Por fim, González-Val et al. (2024) concluem que, nos Estados Unidos, as políticas regionais e estaduais exercem maior influência do que as políticas nacionais sobre a persistência da hierarquia urbana.

No Brasil, no campo da aplicação de políticas públicas, Ribeiro Justo (2015), Zardo (2010) e Borghi (2019) defendem o fortalecimento das cidades médias e pequenas e a interiorização do desenvolvimento por meio de investimentos em infraestrutura (rodovias, saneamento, energia e telecomunicações), estímulo a Arranjos Produtivos Locais (APLs) e diversificação econômica, de modo a reduzir a dependência do setor primário. Orellana e Queiroz (2013) ressaltam a necessidade de estabelecer políticas regionais voltadas à desconcentração e ao fortalecimento de centros urbanos intermediários. Magalhães, Toscano e Bergamaschi (2010) sugerem o uso de métricas mais adequadas — como a área urbanizada — para subsidiar o planejamento territorial. Já Monastério (2008) propõe reformas no Fundo de Participação dos Municípios (FPM), com a adoção de um formato contínuo, a fim de corrigir distorções históricas e aumentar a previsibilidade na distribuição de recursos. Oliveira (2004) enfatiza a importância de políticas de interiorização, apoio a cidades médias e desconcentração do desenvolvimento urbano. Por fim, Resende (2004) argumenta que as desigualdades urbanas no Brasil decorrem de falhas institucionais, e não de dinâmicas naturais de crescimento.

3. Marco Teórico

A seguir, apresentam-se os aspectos teóricos que abrangem os sistemas de cidades

que compõem a hierarquia urbana dos países, bem como a lei de potência que formaliza a Lei de Zipf.

3.1. Lei de Zipf

Os sistemas de cidades e seus modelos explicativos de hierarquia podem ser divididos em dois grandes grupos: o primeiro compreende os modelos de hierarquia dos sistemas de cidades; e o segundo, os modelos de análise da especialização funcional do sistema, conforme a classificação proposta por Segado, García e Rosique (1996).

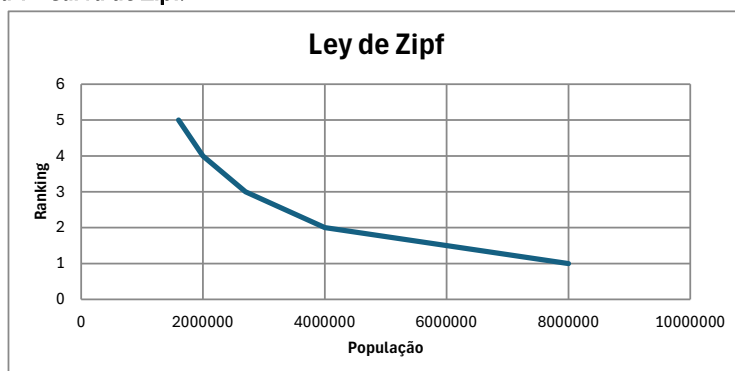
Por sua vez, os modelos hierárquicos dos sistemas de cidades podem ser subdivididos em duas categorias: os modelos verticais, que buscam analisar a hierarquia urbana considerando apenas variáveis associadas ao porte populacional, sem levar em conta outras dimensões espaciais — como no caso do modelo de Pareto ou da regra de tamanho/posição —; e os modelos horizontais, que incorporam a variável espacial ao considerar a distribuição dos núcleos urbanos de acordo com seus níveis populacionais, ou seja, valorizando a horizontalidade entre os núcleos com base em seu porte relativo.

Considerando apenas os modelos verticais, Zipf (1949) retomou a ideia central do trabalho proposto por Auerbach (1913), que indicava que as distribuições dos tamanhos das cidades eram muito mais variadas do que se supunha. Zipf, por sua vez, conseguiu estabelecer uma convergência com a formulação original de Pareto, que também apresenta um expoente igual a -1 . Devido à impressionante regularidade observada nessa distribuição, ela passou a ser conhecida como Lei de Zipf ou Lei de Potência. Fujita, Krugman e Venables (2002) a caracterizam como “o mistério da hierarquia urbana”.

Como já foi apresentado em seções anteriores, a lei de Zipf deriva de um fenômeno empiricamente observado no mundo real: a distribuição populacional de uma região e/ou país, bem como o tamanho das empresas, tende a seguir padrões semelhantes em diferentes países. A Lei de Zipf sugere que, em um dado país, a maioria das cidades tenderá a ser de pequeno porte, enquanto as cidades maiores serão progressivamente menos numerosas.

Por sua vez, a chamada distribuição de Pareto estabelece uma relação matemática entre as populações das cidades de um território nacional. Assim, conhecendo-se a população da maior cidade — ou seja, da cidade líder —, torna-se possível estimar o número de cidades com determinados tamanhos populacionais. Essa relação pode ser representada graficamente como apresentado na Figura 1, por meio da função logarítmica, em que o eixo das ordenadas expressa o logaritmo do número de cidades com determinada população, e o eixo das abscissas, o logaritmo da própria população.

Figura 1 - Curva de Zipf.



Fonte: Elaboração própria.

A chamada regra de classificação de tamanho — ou regra do poder das cidades — foi concebida empiricamente por George Zipf. Essa regra afirma que, ao se ordenar as cidades de um país de forma decrescente com base em sua população, o tamanho de cada cidade será inversamente proporcional à sua posição no ranking. Dessa forma, estabelece-se uma relação constante do tipo $1/L$ entre a população de uma cidade e sua posição na distribuição ordenada dos centros urbanos, segundo o tamanho populacional. A hipótese para a verificação da chamada Lei de Zipf baseia-se no pressuposto de que a população de uma cidade atinge um estado de equilíbrio — o chamado *steady state* —, ou seja, uma condição em que se estabelece uma proporcionalidade estável entre os tamanhos das cidades, representada por $(L_1 = K, L_2 = K/2, L_3 = K/3, \dots, L_n = K/n)$. Essa condição contribui para explicar a dinâmica do crescimento urbano no ponto em que a Lei de Zipf é verificada. O equilíbrio espacial resultante, por sua vez, é produto de uma interação complexa entre forças que atraem e repelem consumidores e empresas, até que estes encontrem uma localização mais vantajosa — ou ótima — para o desenvolvimento de uma cidade.

Por outro lado, uma abordagem alternativa à Lei de Zipf é a chamada “regra do tamanho da classificação” (*rank-size rule*), segundo a qual a população da segunda maior cidade corresponde à metade da população da maior, a terceira à terça parte, e assim sucessivamente. Em um sistema de cidades dentro de um país ou região geográfica, essa relação pode ser expressa formalmente da seguinte forma:

$$R(L_j) = L_1 \cdot L_j^\lambda \quad (1)$$

Em que $R(L_j)$ representa o ranking da cidade j e L_j é o tamanho da população dessa cidade. Por sua vez, L_1 corresponde ao tamanho da população da maior cidade em uma determinada área geográfica, e o expoente refere-se ao parâmetro da Lei de Potência. Para que haja conformidade com a Lei de Zipf, esse coeficiente deve assumir o valor $\lambda = -1$.

$$\ln[R(L_j)] = \ln[L_1] + \lambda \ln[L_j] \quad (2)$$

Considerando a formulação de Zipf da Lei, tem-se o seguinte:

$$\ln[R(L_j)] = \ln[L_1] + \ln[L_j] \quad (3)$$

4. Metodologias econométricas e base de dados

Considerando o exposto, a abordagem metodológica adotada para estimar a Lei de Zipf neste trabalho baseia-se na aplicação da regressão quantílica, conforme proposta por Amarante (2011), a qual permite relaxar algumas das restrições impostas pelo método dos Mínimos Quadrados Ordinários (OLS). Por outro lado, será realizada a estimação da função kernel, com base, em parte, nos trabalhos teóricos de Gabaix (1999) e evidências empíricas de Soo (2001).

Inicialmente, parte-se de uma função objetivo a ser minimizada:

$$\text{Min}_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi_\tau |y_j - \lambda_j^*|, \quad (4)$$

onde:

$$\pi_\tau(\varepsilon_{ij}) = \begin{cases} \tau \varepsilon_{ij}, & \text{para } \varepsilon_{ij} > 0 \\ 1 - \tau \varepsilon_{ij}, & \text{para } \varepsilon_{ij} < 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Min}_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi_\tau |\ln(j) - \ln(L_j) - \ln(L_j)|, \quad (6)$$

$$\pi_\tau(\varepsilon_{ij}) = \begin{cases} 0,25, & \text{para } \varepsilon_{ij} > 0 \\ 0,75, & \text{para } \varepsilon_{ij} < 0 \end{cases} \quad (7)$$

O objetivo da regressão quantílica é minimizar a soma dos desvios-padrão ponderados de acordo com os seguintes quantis, atribuindo pesos $\tau\epsilon_{ij}$ distintos aos desvios positivos nos quartis: 2%, 5%, 25%, 50%, 75%, 95 e 98%.

Por outro lado, para a estimativa das densidades populacionais urbanas, são utilizados estimadores kernel ponderados. Para isso, considera-se uma amostra aleatória de unidades populacionais urbanas $\{Y_i\}_{i=1}^n$ a partir da qual é estimada a densidade do estimador $\hat{F}_h$, conforme descrito a seguir:

$$\hat{F}_h = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y - Y_i}{h}\right) \quad (8)$$

Em que h é definido como um parâmetro de suavização (também chamado de parâmetro de comprimento ou *bandwidth*) e $K(\cdot)$ é o *kernel* (núcleo) que satisfaz essa condição. A densidade estimada³ é formada a partir dessa função, dependendo do valor de h e da função principal utilizada. De acordo com Silverman (1986), pode-se afirmar que não há consenso sobre a escolha do parâmetro de suavização, uma vez que o tema tem sido amplamente discutido na literatura não paramétrica e, de fato, diversas regras têm sido empregadas.

É importante ressaltar que a escolha desse parâmetro constitui um aspecto crucial na estimativa de densidades — neste caso, de populações urbanas —, uma vez que valores muito baixos fornecem pouca informação sobre a densidade estimada, enquanto valores excessivamente altos podem suavizá-la em demasia. Assim, por meio dessa função de densidade, torna-se possível examinar visualmente as distribuições populacionais urbanas que apresentam um grau moderado de suavização.

Por fim, destaca-se que a base de dados utilizada foi composta por informações estatísticas provenientes dos censos populacionais do Brasil, realizados pelo IBGE, e posteriormente resumidas e reagrupadas pelo Centro Latino-Americano e Caribenhos de Demografia (CELADE), subdivisão da CEPAL (2010), sendo publicadas em 2013 (CELADE, 2013).

5. Resultados

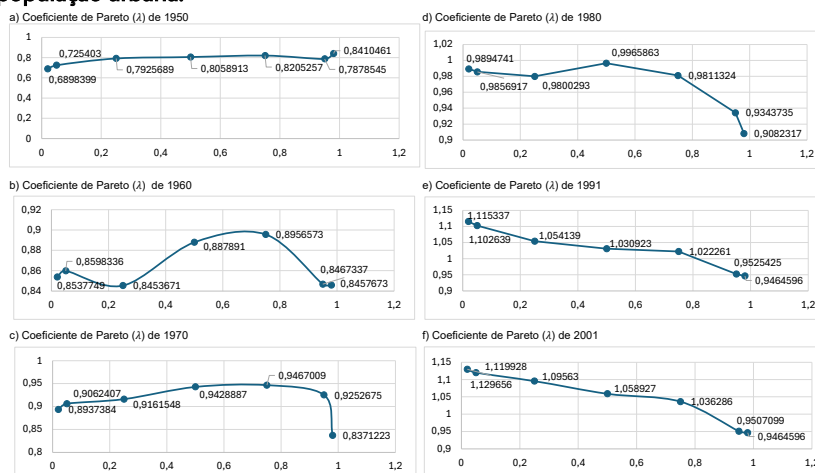
O objetivo desta seção é validar empiricamente a aplicabilidade da Lei de Zipf, ou seja, verificar se o expoente de Pareto é igual a -1. As Figuras 2 e 3 apresentam as estimativas obtidas por meio da regressão quantílica. A Figura 2, em particular, está dividida em cinco partes, nas quais é detalhado o comportamento do coeficiente de Zipf nos quantis de 25%, 50% e 75%, bem como nos percentis de 2%, 95% e 98%, conforme a abordagem aplicada por Amarante (2011).

Como se sabe, os quantis são ferramentas estatísticas utilizadas para analisar a distribuição de dados em grupos previamente ordenados. No presente caso, estão sendo estimados a mediana condicional e outros quantis da variável resposta referente às populações urbanas.

Como ilustrado na Figura 2, no censo de 1950 a validade da Lei de Zipf não pôde ser confirmada, pois os valores estimados foram de -0,7925 para o quantil de 50% e -0,8088 para o de 75%. No censo de 1960, os coeficientes de Pareto atingiram -0,8858 (50%) e -0,8956 (75%). Por sua vez, no censo de 1970, os valores foram de -0,9428 para 50% e -0,9467 para 75%. No censo de 1980, o valor estimado para o quantil de 50% foi de -0,9965. Já no censo de 1991, a validade da lei foi confirmada com um coeficiente de -1,03 para o quantil de 50% e -1,02 para o de 75%. Por fim, no censo de 2001, os valores alcançados foram de -1,05 (50%) e -1,03 (75%), corroborando a hipótese da Lei de Zipf.

³ Uma função kernel gaussiana é comumente utilizada, uma vez que há poucas diferenças de eficiência entre os diversos tipos de kernel — em termos de erro quadrático médio integrado assintótico — conforme indicado por Ziegelmann (2002).

Figura 2 - Estimativas de expoentes de Pareto das cidades brasileiras por quantil da população urbana.



Fonte: Construção própria com base em dados do CELADE (2009).

A evolução do coeficiente de Pareto pode estar relacionada à mudança no modelo econômico adotado no Brasil a partir da década de 1990, quando o Modelo de Substituição de Importações (MSI) foi substituído por uma estratégia com maior ênfase na abertura comercial. Nesse novo contexto, o setor agrícola passou a se desenvolver em maior escala, em detrimento do setor industrial. λ

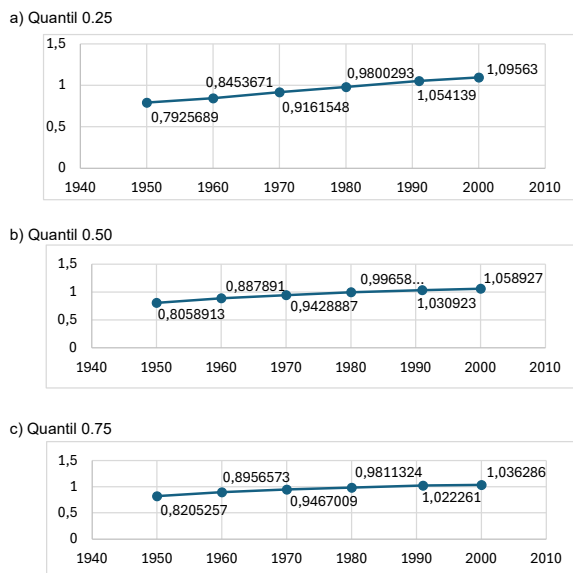
Cabe destacar, ainda, que outro fator relevante para explicar a evolução do tamanho das cidades brasileiras é a migração inter-regional e a imigração internacional. No primeiro caso, os grandes contingentes de migrantes oriundos da região Nordeste vêm alterando a estrutura populacional dos principais centros urbanos das regiões Sudeste e Sul. Já no segundo caso, destacam-se os fluxos de imigrantes alemães, italianos, espanhóis, poloneses e japoneses, que contribuíram significativamente para o povoamento de amplas áreas dessas duas regiões.

A Figura 3 apresenta a análise individual de cada quantil ao longo dos diferentes censos. No caso do quantil de 25%, observa-se um coeficiente de Pareto de -1,05 no censo de 1991. Como mencionado anteriormente, esse valor pode ser interpretado como reflexo da transformação rumo a um sistema mais equilibrado de cidades, decorrente das mudanças estruturais que vêm ocorrendo no Brasil desde a modernização das grandes montadoras do setor automotivo.

No quantil de 50%, obtém-se um coeficiente de Pareto da ordem de -1,03 no censo de 1991. Esse resultado reforça a análise anterior quanto à possibilidade de que o sistema urbano esteja se aproximando de um estado estacionário nesse estrato específico da distribuição populacional.

Por fim, no quantil de 75%, registra-se um coeficiente de -1,01 no censo de 1991, e de -1,03 em outro ponto de observação. Com os valores obtidos neste caso, é possível verificar de forma consistente a validade da Lei de Zipf para o quantil de 75% das cidades, indicando, conforme já destacado, a aproximação a um estado estacionário ótimo na distribuição do sistema urbano brasileiro.

A Tabela 1 apresenta os resultados das regressões simultâneas aplicadas aos censos de 1950 a 2001. Os resultados mais expressivos foram registrados no censo de 1991. Para o quantil de 25%, obteve-se um coeficiente de Pareto de -1,05; para o quantil de 50%, o valor foi de -1,03; e para o de 75%, registrou-se -1,02. Como verificado anteriormente, observa-se uma significativa mudança estrutural nas cidades brasileiras desde o início da década de 1990, e esses resultados reforçam a hipótese de conformidade com a lei de potência.

Figura 3 - Estimativas de expoentes de Pareto das cidades brasileiras no período 1950-2001.

Fonte: Construção própria com base em dados do CELADE (2009).

No censo de 2001, os coeficientes estimados foram de -1,09 para o quantil de 25%, -1,05 para o de 50% e -1,03 para o de 75%. Esses valores sugerem que, nesse período, o sistema urbano brasileiro já havia atingido um estado estacionário. Diante disso, torna-se particularmente relevante aprofundar a análise com base na representação gráfica das funções de densidade kernel, que serão apresentadas na próxima seção, a fim de verificar a existência de evidências empíricas suficientes.

Tabela 1 - Coeficiente de Pareto das regressões quantílicas simultâneas no período 1950-2001.

CENSO	QUANTIL 25	QUANTIL 50	QUANTIL 75
1950	-0,7925689	-0,8058913	-0,8205257
1960	-0,8453671	-0,887891	-0,8956573
1970	-0,9161548	-0,9428887	-0,9467009
1980	-0,9800293	-0,9965863	-0,9811324
1991	-1,054139***	-1,030923***	-1,022261***
2001	-1,09563***	-1,058927***	-1,036286***

Fonte: Construção própria com base em dados do CELADE (2009).

Por fim, a Tabela 2 apresenta os resultados das regressões interquantílicas, cujos coeficientes estimados não sustentam a hipótese de validade da Lei de Zipf. Observa-se que os valores obtidos se desviam significativamente do parâmetro teórico de referência (-1), indicando ausência de conformidade com a distribuição de Pareto esperada para a configuração urbana analisada.

Tabela 2 - Coeficiente de Pareto das regressões interquantílicas para o período 1950-2001.

CENSO	INTERQUANTÍLICO 25-50	INTERQUANTÍLICO 50-75	INTERQUANTÍLICO 25-75
1950	-0,0133044	-0,0279388	-0,0146344
1960	-0,0425239	-0,0502902	-0,0077663
1970	-0,026734	-0,0305462	-0,0038122
1980	-0,016557	-0,0011032	0,0154538
1991	0,0232158	0,0318785	0,0086627
2001	0,0367025	0,0593438	0,0226414

Fonte: Construção própria com base em dados do CELADE (2009).

5.1. Função de densidade kernel

Uma das vantagens da aplicação da função de densidade kernel é a possibilidade de visualizar de forma mais suave e contínua a distribuição populacional ao longo da faixa em que se dá o crescimento urbano das cidades brasileiras.

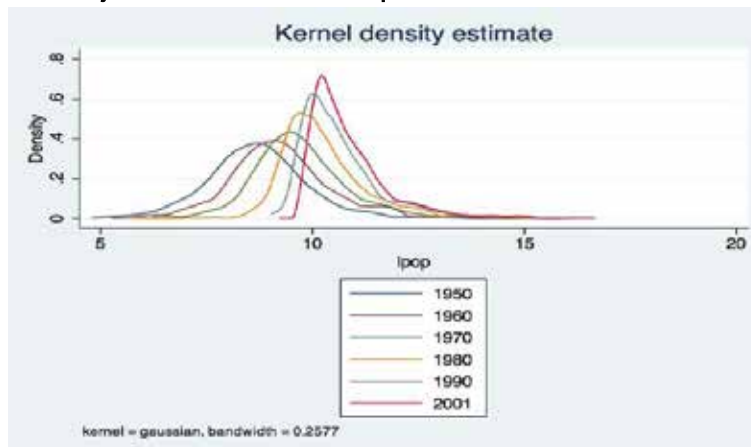
O procedimento de estimativa da densidade kernel consiste em ajustar uma distribuição normal baseada nos valores da amostra urbana, na qual cada ponto observado é posteriormente integrado por meio de uma soma ponderada dessas distribuições. Esse processo permite interpretar as variações na tendência ao longo do tempo.

De acordo com os resultados apresentados na Figura 3, para o caso do Brasil, nos censos realizados entre 1950 e 2001, observam-se evidências claras de uma mudança estrutural significativa. A função de densidade correspondente ao censo de 1950 revela uma distribuição mais achatada e dispersa.

Com o passar das décadas, especialmente nos censos de 1970 e 1980, verifica-se uma tendência cada vez mais acentuada de concentração, fenômeno intimamente relacionado à primazia urbana exercida por grandes regiões metropolitanas, como as das capitais dos estados de São Paulo, Minas Gerais, Rio de Janeiro e Rio Grande do Sul.

É importante destacar que, no caso do Brasil, o valor mínimo da população das cidades cresceu de 156 habitantes em 1950 para 10.011 em 2001, representando um aumento de 6.217,3%. Tal cenário reforça a relevância dos estudos baseados em leis de potência para a compreensão das dinâmicas urbanas.

Figura 4 - Função de Densidade de Kernel para Brasil entre os censos 1950-2001.



Fonte: Construção própria com base em dados do CELADE (2013).

Outro aspecto relevante a ser destacado é a mudança nas distribuições empíricas das densidades populacionais entre 1950 e 2001, conforme ilustrado na Figura 4, onde se observa claramente um deslocamento progressivo da distribuição para a direita.

Em 1950, a distribuição populacional era marcadamente mais achatada e dispersa, refletindo uma maior heterogeneidade no tamanho das cidades e a presença de um valor mínimo populacional bastante reduzido. Essa configuração, no entanto, é revertida nos censos posteriores, culminando, em 2001, em uma função de densidade muito mais aguda e inclinada, com menor dispersão.

As evidências empíricas apresentadas sustentam a hipótese de que o Brasil tem apresentado traços de primazia urbana, no qual poucas cidades concentram parcela significativa da população e da atividade econômica. Esse processo é refletido no fato de que a região Sudeste responde por aproximadamente 54,02% do Produto Interno

Bruto (PIB) nacional (IBGE, 2015). Tal concentração contribui para uma distribuição relativamente menos equitativa do sistema de cidades no país, impulsionada, entre outros fatores, pelo crescimento de centros urbanos associados ao comércio intraindustrial, à predominância do transporte rodoviário e à histórica ausência de investimentos em infraestrutura ferroviária nas últimas quatro décadas.

6. Conclusões finais

Os resultados obtidos neste estudo indicam que a validade empírica da Lei de Zipf para as cidades brasileiras não se confirma de forma robusta ao longo de todo o período analisado (1950–2001). Os coeficientes estimados de Pareto situam-se significativamente abaixo do valor teórico de referência (-1) nas décadas de 1950 a 1980, refletindo um sistema urbano em formação, fortemente centralizado e marcado por profundas assimetrias regionais e estruturais.

A mudança estrutural torna-se evidente a partir dos censos de 1991 e 2001, quando os coeficientes estimados nos quantis de 25%, 50% e 75% convergem para valores próximos de -1. Essa trajetória sugere que o sistema urbano brasileiro tem se aproximado de um estado estacionário compatível com a regularidade zipfiana, especialmente no estrato mediano da distribuição populacional. O uso da regressão quantílica permitiu identificar nuances relevantes nessa convergência, revelando que o ajustamento não ocorre de forma homogênea ao longo da distribuição — isto é, a regularidade zipfiana manifesta-se mais fortemente nas faixas intermediárias da hierarquia urbana, enquanto nos extremos persistem desvios estruturais importantes.

Os resultados das funções de densidade kernel reforçam esse diagnóstico, evidenciando uma transição progressiva de uma distribuição mais achatada e dispersa (1950) para uma curva mais concentrada e inclinada (2000), com deslocamento para a direita e aumento expressivo do valor mínimo populacional urbano. Esses achados são consistentes com o processo histórico de urbanização acelerada, industrialização concentrada e expansão das redes de infraestrutura nas regiões Sudeste, Sul e Centro-Oeste, que moldaram a configuração hierárquica das cidades brasileiras no século XX.

Além disso, as interações entre forças migratórias e transformações econômicas — como a substituição de importações, a abertura comercial e a interiorização parcial do desenvolvimento — desempenharam papel crucial na evolução da estrutura urbana. O crescimento de cidades médias e intermediárias, embora insuficiente para romper completamente a primazia das metrópoles, sinaliza uma tendência de desconcentração relativa, compatível com a literatura internacional (Krugman, 1996; Gabaix, 1999; Overman & Ioannides, 2000).

Do ponto de vista das implicações para políticas públicas, os resultados sugerem a importância de estratégias territoriais que: a) fortaleçam redes de cidades médias e pequenas, com investimentos em infraestrutura física e digital; b) reduzam a concentração excessiva em poucos centros metropolitanos, promovendo integração funcional e econômica entre regiões; c) alinhem instrumentos fiscais e institucionais (como a reforma do FPM e mecanismos de governança intermunicipal) à promoção de maior equidade urbana; e d) incentivem a diversificação produtiva regional, reduzindo a dependência de setores primários e fortalecendo bases urbanas intermediárias.

Por fim, este estudo confirma que a Lei de Zipf deve ser entendida menos como uma “lei universal” e mais como uma regularidade estatística contingente, sensível ao contexto histórico, institucional e econômico. A tendência à regularidade observada no Brasil a partir dos anos 1990 não é um dado imutável, mas o resultado de processos

estruturais complexos. Nesse sentido, futuras pesquisas podem avançar ao: a) integrar modelos econométricos espaciais e dinâmicos à análise da hierarquia urbana; b) explorar períodos mais recentes (2010–2022), incorporando novas ondas de urbanização e transformação tecnológica; e c) examinar de forma mais detalhada o papel de políticas regionais e infraestruturais na conformação dos padrões de distribuição urbana.

Assim, ao iluminar a evolução empírica da hierarquia urbana brasileira e suas implicações para o planejamento territorial, este trabalho reforça a importância de políticas públicas territoriais coordenadas e de longo prazo para promover um sistema urbano mais equilibrado, eficiente e inclusivo.

Referências

ANDERSON, G.; GE, Y. The Distribution of Chinese City Sizes, *Regional Science and Urban Economics* 35(6):756-776, November 2005.

AMARANTE, A. Dinâmica da população, e os tamanhos dos municípios brasileiros. Florianópolis, 2009. V Encontro de Economia Catarinense. Disponível em: <https://www.apec.org.br/anais/v-eec/anais/32-EEC%202011.PDF>. Acesso em: 10 jun. 2025.

AMARANTE, A. de. Ensaios de economia regional e urbana. 2011. Tese (Doutorado em Economia) – Programa de Pós-Graduação em Economia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/35454?locale-attribute=en&show=full>. Acesso em: 18 jun. 2025.

AUERBACH, F. Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration. *Petermann's Geographische Mitteilungen*, [S.l.], n. 59, p. 74–76, 1913.

BATTY, M.; SHIODE, N. Population growth dynamics in cities, countries, and communication systems. *Environment and Planning A: Economy and Space*, v. 33, n. 3, p. 407-430, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1068/a3311>. Acesso em: 10 maio 2025.

BERRY, B. City Size Distribution and Economic Development, *Economic Development and Cultural Change*, Chicago Journal, Chicago. v. 9, n. 4, p. 573-588, 1961.

BERRY, B. J. L.; OKULICZ-KOZARYN, A. The city size distribution debate: Resolution for US urban regions and megalopolitan areas. *Cities*, v. 29, n. 1, p. S1–S7, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cities.2011.11.007>. Acesso em 10 jun. 2025

BORGHI, DEVISSATE M. Distribuição da População dos Municípios Brasileiros, Lei de Zipf e Lei de Gibrat. Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade de Brasília, Brasília, 2019.

CAMERON, A. C.; TRIVEDI, P. *Microeconometrics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. p. 87–90.

CAMERON, A. C.; TRIVEDI, P. *Microeconometrics using Stata*. Revised ed. College Station: Stata Press, 2009. p. 211–225.

CENTRO LATINO-AMERICANO E DO CARIBE DE DEMOGRAFIA (CELADE). Censos populacionais: banco de dados da América Latina e Caribe. Santiago: CEPAL, 2013. Disponível em: <https://www.cepal.org/pt-br/organizacoes/celade>. Acesso em: 18 jun. 2025.

CENTRO LATINOAMERICANO Y CARIBEÑO DE DEMOGRAFÍA (CELADE). Urbanización y perspectivas. América Latina. Observatorio Demográfico, Santiago de Chile, n. 8, p. 49–61; 63–251, 2009.

CEPAL – COMISIÓN ECONÓMICA PARA AMÉRICA LATINA. Definición de población urbana y rural utilizadas en los censos de los países latinoamericanos. Santiago: CEPAL, 2010.

CHRISTALLER, W. Die zentralen Orte in Süddeutschland: eine ökonomisch-geographische Untersuchung über die Gesetzmäßigkeit der Verbreitung und Entwicklung der Siedlungen mit städtischen Funktionen. Jena: Gustav Fischer, 1933.

CLEMENTE, J.; GONZÁLEZ-VAL, R.; OLLOQUI, I. Zipf's and Gibrat's laws for migrations. *The Annals of Regional Science*, v. 47, n. 1, p. 235–248, 2011.

CÓRDOBA, J. C. On the distribution of city sizes. *Journal of Urban Economics*, v. 63, n. 1, p. 177–197, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jue.2007.02.002>

DELGADO, A. P.; GODINHO, I. M. The evolution of city size distribution in Portugal: 1864–2001. Porto: Faculdade de Economia da Universidade do Porto; CEDRES – Centro de Economia e Desenvolvimento Regional, Estudos e Serviços, 2004. (Working Papers, Research – Work in Progress, n. 151).

DIRETORIA DE ESTATÍSTICA E INFORMAÇÕES (DIREI). Nota técnica: uma nota sobre a Lei de Zipf nos municípios brasileiros. Secretaria de Planejamento e Gestão (SEPLAG) Belo Horizonte, n. 7, 2024.

ECKHOUT, J. Gibrat's Law for (All) Cities. *American Economic Review*, v. 94, n. 5, p. 1429–1451, dez. 2004.

FUJITA, M.; KRUGMAN, P.; VENABLES, A. Economia espacial: urbanização, prosperidade econômica e desenvolvimento humano no mundo. São Paulo: Futura, 2002. p. 15–27; 34–38; 242–248.

GABAIX, X. Zipf's law for cities: an explanation. *The Quarterly Journal of Economics*, Boston, v. 114, n. 3, p. 739–743; 760–762, aug. 1999. Disponível em: <http://dharrison.ba.ttu.edu/Real%20Estate%20Investments/Zipfs%20Law%20--%20QJE%201999.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2025.

GABAIX, X.; IOANNIDES, Y.M. The Evolution of City Size Distributions, *Handbook of Urban and Regional Economics*, Medford, Volume IV: Cities and Geography, p. 4–13; 38–39, maio. 2003. Disponível em: <http://ase.ufts.edu/econ/papers/200310.pdf>. Acesso em: 23 maio 2025.

GIBRAT, R. Les inégalités économiques. Paris: Librairie du Recueil Sirey, 1931.

GONZÁLEZ-VAL, R.; XIMÉNEZ-DE-EMBUM, D. P. A long-term, regional-level analysis of Zipf's and Gibrat's laws in the United States. *Cities, The International Journal of Urban Policy and Planning*. Science Direct, 2024.

HIGACHI, Hermes Yukio; PRATES, Thierry Molnar. A distribuição do tamanho dos municípios do Paraná e a Lei de Zipf. *Revista Economia & Tecnologia*, [S. l.], v. 4, n. 4, 2008. DOI: 10.5380/ret.v4i4.27334. Disponível em: <https://revistas.ufpr.br/ret/article/view/27334>. Acesso em: 20 set. 2025.

HINLOOPEN, J.; VAN MARREWIJK, C. Comparative Advantage, the Rank-Size Rule, and Zipf's Law. Tinbergen Institute Discussion Paper, TI 2006-100/1, Amsterdam/Rotterdam: Tinbergen Institute, 2006. Disponível em: <https://www.tinbergen.nl>. Acesso em: 5 out. 2025.

HSU, Wen-Tai. Central Place Theory and City Size Distribution. *Economic Journal*, v. 122, n. 563, p. 903-932, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1468-0297.2012.02512.x>.

IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Contas regionais 2015: queda no PIB atinge todas as unidades da federação pela primeira vez na série histórica. 2015. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/17999-contas-regionais-2015-queda-no-pib-atinge-todas-as-unidades-da-federacao-pela-primeira-vez-na-serie.html>. Acesso em: 18 jun. 2025.

IOANNIDES, Y. M.; OVERMAN, H. G. Zipf's law for cities: an empirical examination. *Regional Science and Urban Economics*, v. 33, n. 2, p. 127-137, mar. 2003. Disponível em: 10.1016/S0166-0462(02)00006-6. Acesso em: 10 abril. 2024.

KRUGMAN, P. Confronting the Mystery of Urban Hierarchy. *Journal of the Japanese and International Economies*, v. 10, p. 399-418, 1996.

LAI, J. Using Random Growth Models to Explain Zipf's Law. Austin: University of Texas, 2001. Trabalho apresentado no curso ECO 380K – Economic Development Theory, Spring 2001.

LUCKSTEAD, J.; DEVADOSS, S. Do the World's Largest Cities follow Zipf's and Gibrat's Law. *Economics Letters*, 2014.

MACHADO RUIZ., R. As Estruturas Urbanas do Brasil: Uma análise a partir do tamanho das cidades. XXXII Encontro Nacional de Economia João Pessoa, Paraíba 06 a 10 de dezembro de 2004.

MAGALHÃES, Matheus Albergaria de; TOSCANO, Victor Nunes. Hierarquia Urbana e Polarização Populacional: um estudo a partir de cidades do Espírito Santo. Vitória: Instituto Jones dos Santos Neves, Nota Técnica n. 11, 2010. 32 p.

MIRANDA, R.A.; DRUTA BADIA, B. A evolução da distribuição do tamanho das cidades de Minas Gerais: 1920-2000 In Anais do XII Seminário sobre a Economia Mineira, Cedeplar, Universidade Federal de Minas Gerais, Diamantina, 2006. Disponível: <https://diamantina.cedeplar.ufmg.br/portal/download/diamantina-2006/D06A075.pdf>. Acesso: 12 jun. 2025.

MONASTÉRIO, L. A lei de Zipf no Rio Grande do Sul (1940-2000). *REDES*, Santa Cruz do Sul, v. 9, n. 2, p. 181-190, maio/ago. 2008.

MONASTÉRIO, L. O FPM e a estranha distribuição da população dos pequenos municípios brasileiros. IPEA, 2012.

MODICA, M.; REGGIANI, A; NIJKAMP, P. A Comparative Analysis of Gibrat's and Zipf's Law- Quaderni – Working Paper DSE, Nº 1008, 2015.

MOURA Jr., Newton J.; RIBEIRO, Marcelo B. Zipf law for Brazilian cities. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 367, p. 441-448, 2006.

NISHIYAMA, Y.; OSADA, S. Statistical theory of rank-size rule regression under Pareto distribution. Discussion Paper Series, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University, 2004.

NITSCH, V. Zipf zipped. *Journal of Urban Economics*, v. 57, n. 1, p. 86-100, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jue.2004.09.002>.

OLIVEIRA, C.A. A. de. Evolução da Distribuição do Tamanho das Cidades Brasileiras 1936-2000. In: ENCONTRO REGIONAL DE ECONOMIA, 9. Anais... Fortaleza, 2004.

ORELLANA ARAGON, J.A.; QUEIROZ, V. S. A Evolução da Distribuição do Tamanho das Cidades: o Caso do Nordeste brasileiro. *Economia e Desenvolvimento (Recife)*, v. XII, p. 110, 2013.

PRATES, T.; HIGACHI, Y. H. A distribuição do tamanho dos municípios do Paraná e a Lei de Zipf. *Economia & Tecnologia*- no. 4, vol. 15, 2008.

RESENDE, M. Gibrat's Law and the Growth of Cities in Brazil: A Panel Data Investigation, *Urban Studies*, Urban Studies Journal Limited, vol. 41(8), p. 1537-1549, jul. 2004.

REED, J. The Pareto, Zipf and other power laws, *Economics Letters*, Elsevier, vol. 74(1), pages 15-19, December 2001.

RIBEIRO, E. P. Small sample evidence of regression quantile estimates for structural models: estimation and testing. *Revista de Econometria*, Rio de Janeiro, v. 18, n. 2, p. 215-244, Nov. 1998.

RIBEIRO JUSTO, J. Um Século de Crescimento das Cidades Brasileiras: Uma abordagem espacial (1910-2010). v. 16 n. 1, 2015: Anais do XVI ENANPUR. Disponível em: <http://anais.anpur.org.br/index.php/anaisenanpur/article/view/1874/1853>. Acesso em: 10 abril. 2024.

ROSE, A.K. Cities and Countries. Working Paper 11762 National Bureau of Economic Research, Cambridge, 2005.

ROSEN, K. T.; RESNICK, M. The size distribution of cities: An examination of the Pareto law and primacy. *Journal of Urban Economics*. [SJ]. v. 8, n. 2, p. 165-186, 1980. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0094119080900431>. Acesso em: 12 feb. 2015.

ROSSI-HANSBERG, E.; WRIGHT, M. Urban Structure and Growth Institute for Empirical Macroeconomics, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Discussion Paper 141, 2003.

SEGADO, F.; GARCIA, A.; ROSIQUE, M. Ordenación del Territorio. Editum, Universidad de Murcia, Murcia. Cap 5. Sistema de ciudades y modelos explicativos, p. 49-69, 1996.

SILVERMAN, B. W. Density estimation for statistics and data analysis. Bath: School of Mathematics, University of Bath, 2002. p. 1-22.

STANLEY, M. H. R.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; MANTEGNA, R. N.; SALINGER, M. A.; STANLEY, H. E. Zipf plots and the size distribution of firms. *Economics Letters*, v. 49, n. 4, p. 453-457, 1995. [https://doi.org/10.1016/0165-1765\(95\)00693-7](https://doi.org/10.1016/0165-1765(95)00693-7).

SOO, K. T. Zipf law for cities: a cross-country investigation. CEP Discussion Paper – Center

of Economic Development (CED), London, n. 641, p. 1–37, 2004.

VENABLES, A. Equilibrium locations of vertically linked industries. *International Economic Review*, [S.l.], v. 37, n. 2, p. 341–359, maio 1996.

VINING, D. R. Autocorrelated growth rates and the Pareto law: a further analysis. *Journal of Political Economy*, Chicago, v. 84, p. 369–380, 1976.

ZARDOTRINDADE, L. Distribuição populacional e evolução do tamanhos dos municípios brasileiros: uma análise espacial do período 1920-2000. Dissertação de Mestrado apresentada Ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências e Letras de Araraquara da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho, 2010.

ZARDO TRINDADE, L.; SARTORIS NETO, A. Distribuição Populacional e Evolução do Tamanho das Cidades Brasileiras: Uma análise espacial do período 1920-2000. Texto para Discussão (TD-E) 11, 2009. IEA/UNESP, São Paulo, 2009.

ZIEGELMANN, F. A. Estimation of volatility functions: nonparametric and semi-parametric methods. 2002. Thesis (Ph.D.) – University of Kent, Canterbury, 2002.

ZIPF, G. K. Human behavior and the principle of least effort. Cambridge: Addison-Wesley, 1949. p. 19–50.

