

Teoria dos jogos e opções reais: uma aplicação no mercado imobiliário brasileiro

RESUMO: Esse trabalho replica um modelo matemático desenvolvido por Grenadier (2002), baseado na Teoria de Opções Reais e na Teoria dos Jogos, para aplicação em análise financeira do mercado imobiliário residencial na cidade do Rio de Janeiro, Brasil. A ideia central do modelo de avaliação é a busca do equilíbrio entre demanda e oferta de unidades residenciais em uma determinada região, considerando o efeito sobre o preço desses ativos e sobre a atitude dos concorrentes nesse mercado. Como objetivo principal, busca-se a compatibilidade do modelo teórico presente nesse trabalho com a realidade existente no mercado imobiliário da região, por meio da utilização da série de preços de residências para a obtenção dos parâmetros.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria dos jogos, Teoria de opções reais, Mercado imobiliário, Movimento Geométrico Browniano, Exercício de opções.

CLASSIFICATION JEL: C73, D81, G13, R20.

ABSTRACT: This work replicates a mathematical model based on Game Theory and Real Options (Grenadier 2002) for the financial analysis of the residential real estate market of Rio de Janeiro (Brazil). The main idea of the evaluation model is to determine a balance between demand and supply of housing units in a given region, taking into consideration the effect on the price of these assets and on the competitors' attitudes in this market. As a principal object, compatibility is sought of the theoretical model submitted in the work with the reality that exists in the real estate market of the region by using a series of housing prices to obtain parameters.

KEY WORDS: Game theory, Real options theory, Real estate market, Geometric brownian motion, Option exercise games.

JEL CLASSIFICATION: C73, D81, G13, R20.

Felipe A. Costa¹

Carlos P. Samanez²

¹ Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUCRJ
Departamento de Engenharia Industrial
E-mail: felcost615@hotmail.com
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea
Rio de Janeiro – RJ - Brasil – CEP: 22453-900
Caixa Postal: 38097 - Telefone: (21) 3527-1284

² Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUCRJ
Departamento de Engenharia Industrial
E-mail: cps@rdc.puc-rio.br
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea
Rio de Janeiro – RJ - Brasil – CEP: 22453-900
Caixa Postal: 38097 - Telefone: (21) 3527-1284

Introdução

Segundo Grenadier (2002), um ponto em comum na vasta maioria dos artigos relacionados à Teoria de Opções Reais é a ausência de uma análise sobre as interações estratégicas entre os detentores das opções. Decisões de investimento — exercício das opções — são formuladas isoladamente, sem considerar o impacto potencial das estratégias de investimento das demais firmas. Como exemplo desse fato, pode-se tomar o resultado mais conhecido da literatura sobre opções reais: a invalidação da regra padrão de só investir em um projeto com VPL não negativo. Devido à incerteza do valor futuro do ativo-objeto, existe um custo de oportunidade de investir hoje. Desse ponto, surge o valor da “opção de adiar”. Assim, a regra ótima de investimento, descrita na literatura sobre opções reais, será aplicar quando o valor do ativo superar o custo do investimento por um substancial prêmio da opção. Entretanto, esse resultado depende do acesso dos competidores a esse projeto. Se uma firma teme a entrada de um ou mais concorrentes, a opção de adiar torna-se menos valiosa. Para compreender o investimento em um projeto ou indústria com pressão competitiva, torna-se essencial uma análise do equilíbrio nas estratégias de exercício das opções utilizando teoria dos Jogos.

Um jogo estratégico de exercício das opções pode ser aplicado a um amplo contexto de investimentos no mundo real, onde o retorno financeiro de uma empresa está intimamente relacionado às estratégias de investimento de seus competidores. Como exemplo, recursos aplicados em Pesquisa e Desenvolvimento são análogos ao exercício de uma opção de investir em futuras oportunidades de crescimento. O retorno de tais esforços em pesquisa pode ser elevado se a empresa for a única a ter acesso à tecnologia em desenvolvimento, mas pode ser completamente nulo se outras firmas também tiverem o mesmo acesso. De modo semelhante, um investidor, considerando a possibilidade de construir um edifício comercial, percebe que o retorno financeiro da obra depende fundamentalmente da ação de outros empreendedores. Os aluguéis das salas e as taxas de ocupação são muito afetados pela presença de outras construções próximas ao local.

Existem relativamente poucas aplicações de equilíbrio estratégico com políticas de exercício de opções na literatura. Isso pode ser explicado pelo fato de que, para o caso das opções financeiras, o exercício realizado por uma firma qualquer não influencia nas características do ativo-objeto ou das próprias opções. Alguns trabalhos recentes foram desenvolvidos sobre o assunto. Para o caso do mercado imobiliário, Williams (1993) e Grenadier (1996) discutiram os jogos com exercício de opções reais. Lambrecht e Perraudin (1999) apresentaram um exemplo de jogo com firmas competindo para o exercício de opções reais.

Seguindo a determinação de equilíbrio nas estratégias de exercício das opções reais, as implicações desse equilíbrio devem ser examinadas cuidadosamente. Como mencionado anteriormente, para uma empresa com acesso “monopolístico” a um projeto, a opção de adiar pode ser bastante valiosa, levando a decisões de investimento a níveis bem superiores ao gatilho correspondente ao $VPL = 0$. Entretanto, alguns modelos demonstram que a presença da competição destrói rapidamente o valor da opção de adiar. O fato de essa opção ser extremamente valiosa para o caso de monopólio explica o montante de recursos que as empresas gastam na intenção de proteger seu posicionamento no mercado.

Uma implicação relacionada a esses modelos é que, à medida que o número de competidores na indústria aumenta, a possibilidade de que o valor presente do ativo-objeto caia abaixo do custo do investimento também aumenta. Em muitos casos no mundo real, investimentos que inicialmente pareciam bastante promissores tornam-se prejudiciais financeiramente a partir de pequenas mudanças nas condições de mercado. No entanto, na teoria básica de opções reais, tais perdas *a posteriori* são muito raras. Como a empresa monopolista investe somente a um valor substancial da opção de adiar, a probabilidade de reversão no valor do ativo-objeto é bastante remota. Assim, tal teoria apresenta dificuldades em explicar a explosão de alguns mercados, como o caso do setor imobiliário, onde períodos de um número excessivo de construções levam a ondas de baixa ocupação e queda no preço dos apartamentos ou salas comerciais.

Isso pode ser explicado pelo prêmio bem mais reduzido das opções em mercados competitivos, tornando as reversões no valor dos ativos muito mais prováveis.

Um resultado bastante útil do estudo do equilíbrio nas estratégias de exercício das opções reais é que ele pode ser determinado em um ambiente “artificial” de indústria perfeitamente competitiva. Isto é, se a curva de demanda da indústria é transformada de uma maneira particular, o equilíbrio em um oligopólio pode ser obtido como se a indústria fosse perfeitamente competitiva. Um grande número de artigos, como Spence (1976a, 1976b), Bergstrom e Varian (1985) e Slade (1994), discute o problema da redução do estudo do equilíbrio estratégico da indústria em uma solução para o caso da otimização de apenas um único agente dessa indústria.

O fato de o equilíbrio estratégico do exercício das opções ser obtido a partir de um ambiente competitivo artificial, ou da solução do problema de otimização individual, permite a extensão dos resultados para ambientes mais complexos. Grenadier (2000) foi capaz de resolver o problema para uma indústria perfeitamente competitiva, considerando o tempo de execução do exercício das opções, incluindo as variações de oferta e demanda nesse período. Assim, pode-se transformar o equilíbrio em um oligopólio no equilíbrio para um mercado equivalente ao competitivo real, obtendo soluções fechadas para as estratégias ótimas de investimento com a presença das opções reais analisadas.

Em jogos estocásticos, em geral, e em jogos de opções reais, em particular, a introdução de uma variável de estado seguindo um processo estocástico conhecido permite a utilização do conceito de Equilíbrio de Markov. Esse tipo de equilíbrio é função apenas do estado corrente — ex. preço atual do petróleo —, que segue um processo de Markov. Em jogos de opções reais, utiliza-se processos estocásticos de Markov, onde o estado corrente sumariza o efeito do passado no jogo. O equilíbrio não depende diretamente da história do jogo, sendo adequado para os complexos jogos estocásticos onde o *payoff* em um dado instante depende desse estado e das ações que podem ser tomadas nesse instante.

De acordo com Merton (1973), em seu pressuposto número oito, “o processo estocástico que descreve o valor da oportunidade de investimento e suas variações no tempo deve ser representado como um processo de Markov homogêneo”. Essa utilização generalizada do pressuposto de processos estocásticos markovianos é extremamente importante já que explicita que os retornos esperados para os ativos reais não dependerão de qualquer outra variável que não seja o preço do próprio ativo considerado.

1. Modelo matemático e premissas utilizadas com teoria dos jogos e opções reais

A ideia básica dos modelos de precificação de opções está relacionada à abordagem de investimentos via teoria de Opções Reais. Cada firma detém uma sequência de oportunidades de investimento, análogas ao exercício de opções de compra sobre ativos reais. Na imensa maioria dos modelos com opções, tanto reais quanto financeiras, o ponto de partida é um processo exógeno para o valor do ativo-objeto, seja o preço das ações no modelo de Black and Scholes, ou o fluxo de caixa dos projetos (BRENNAN; SCHWARTZ, 1985; MCDONALD; SIEGEL, 1986). No entanto, para o estudo em questão, o valor do retorno do investimento, que determina o exercício ou não das opções, é endógeno, já que depende das estratégias de exercício dos demais detentores das opções. Nesse ambiente de negócios, o exercício ótimo das opções não pode ser obtido isoladamente, mas sim calculado como resultado de equilíbrio baseado em Teoria dos Jogos.

Segundo Grenadier (2002), considera-se uma indústria definida como oligopólio, composta por n firmas idênticas, produzindo um único e homogêneo produto. A um tempo t , a firma i produz $q_i(t)$ unidades desse produto, que pode ser dividido infinitamente. O preço de uma unidade desse bem, $P(t)$, flutua de forma estocástica no tempo de acordo com a definição abaixo:

$$P(t) = D[X(t), Q(t)] \quad (1)$$

onde D representa a função demanda inversa, $X(t)$ é o processo de choque exógeno na demanda, e $Q(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t)$ é

o processo de oferta da indústria. Por simplicidade, assume-se que não há custos variáveis de produção, de forma que $P(t)$ representa o fluxo de caixa por unidade. O processo de oferta de todas as firmas, exceto a firma i é apresentado por $Q_{-i}(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n q_j(t)$. O fluxo de lucro da firma i , dado o estado atual da indústria, é definido por:

$$\pi_i[X(t), q_i(t), Q_{-i}(t)] = q_i(t) \cdot D[X(t), q_i(t) + Q_{-i}(t)] \quad (2)$$

Assume-se também que a função D é tal que as condições $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial X \partial q_i} > 0$ e $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0$ valem para todo i .

A qualquer momento do tempo, cada empresa pode investir em capacidade adicional para aumentar sua produção por um incremento infinitesimal $dq_i = dQ/n$. Se todas as firmas aumentarem sua capacidade simultaneamente, $Q(t)$ sofrerá um aumento equivalente a dQ . O custo desse incremento é linear: o aumento da produção da firma envolve um custo K por unidade produzida.

A opção pela modelagem em tempo contínuo está fundamentada na possibilidade de utilizarmos as equações diferenciais que contemplem aumentos e quedas infinitesimais de preço e custo das unidades ofertadas por parte das empresas participantes do oligopólio. Esses aumentos e quedas podem ocorrer em qualquer instante de tempo, determinando o valor adequado do “gatilho” e a relação entre a oferta e demanda das unidades negociadas continuamente à medida que o tempo passa.

Nesse sentido, segue-se a estrutura de mercado proposta por Merton (1973), considerando principalmente seus pressupostos de número dois e sete. O pressuposto dois indica que não existem custos de transação, taxas ou problemas de indivisibilidade dos ativos. Já o pressuposto sete indica que as transações de compra e venda dos ativos são realizadas continuamente no tempo. Pode-se considerar que o pressuposto sete deriva diretamente do pressuposto dois. Se não existem custos de transação e os ativos podem ser negociados em qualquer escala, os investidores irão revisar suas carteiras a todo o momento. Na realidade, custos de transações existem e os modelos de tempo discreto são capazes de reconhecê-los. Segundo Merton (1973),

a grande dificuldade encontrada com esse tipo de modelo é que o intervalo de tempo entre as transações seria estocástico e nãoconstante, impossibilitando a obtenção de soluções únicas fechadas. Isso porque a demanda por ativos e o equilíbrio de mercado encontrado vai depender do intervalo de tempo escolhido.

Considerando a natureza dos investimentos realizados pelos participantes do mercado imobiliário, o modelo no tempo contínuo para obtenção do valor dos ativos e dos “gatilhos” fica mais ajustado ao “mundo real” que o modelo em base de tempo discreto. Essa vantagem na obtenção das soluções propostas pelo modelo em tempo contínuo compensa a dificuldade operacional decorrente do uso de técnicas matemáticas mais sofisticadas.

O choque, $X(t)$, é a fonte de incerteza do modelo. Para cada ponto no tempo, até mesmo a demanda no instante seguinte é incerta. Assume-se que $X(t)$ segue um processo de difusão homogêneo no tempo da forma:

$$dX = \mu(X) dt + \sigma(X) dz \quad (3)$$

onde $z(t)$ é um processo de Wiener. Essa classe de processo engloba vários casos especiais usados frequentemente na literatura sobre opções reais. Se $\mu(X) = \mu X$, e $\sigma(X) = \sigma X$, então $X(t)$ segue um Movimento Geométrico Browniano — MGB, com distribuição log-normal. Se $\mu(X) = \mu$, e $\sigma(X) = \sigma$, então $X(t)$ segue um Movimento Browniano, com distribuição normal. Assume-se que o fluxo de caixa é avaliado de forma neutra ao risco, sendo r a taxa de desconto neutra ao risco.

A decisão ótima de exercício das opções deve ser parte de uma solução endógena de equilíbrio de Nash para estratégias de exercício. Cada firma escolhe seu processo de produção $q_i(t)$ de forma a maximizar seu valor, condicionado às estratégias de exercício assumidas por seus competidores. O vetor que define as n diferentes estratégias $[q_1^*(t), \dots, q_n^*(t)]$ constitui um equilíbrio de Nash se $q_i^*(t)$ for a estratégia ótima para a firma i , considerando que as estratégias dos demais competidores, $Q_{-i}^*(t)$, já foram dadas. Matematicamente, seja $V^i = [X, q_i, Q_{-i}; q_i(t), Q_{-i}(t)]$ o valor da firma i , para dada estratégia $q_i(t)$ e $Q_{-i}(t)$, onde (X, q_i, Q_{-i}) são os valores

iniciais para as variáveis de estado. V^i pode ser escrito como o valor presente do fluxo de caixa futuro esperado:

$$V^i[X, q_i, Q_{-i}; q_i(t), Q_{-i}(t)] = E\left\{\int_0^\infty e^{-rt} \pi_i[X(t), q_i(t), Q_{-i}(t)] dt - \int_0^\infty e^{-rt} K dq_i(t)\right\} \quad (4),$$

condicionado ao estado atual (X, q_i, Q_{-i}) . Assim, a estratégia $[q_i^*(t), \dots, q_n^*(t)]$ constitui um equilíbrio de Nash se:

$$V^i[X, q_i, Q_{-i}; q_i^*(t), Q_{-i}^*(t)] = \sup_{\{q_i(t): t \geq 0\}} V^i[X, q_i, Q_{-i}; q_i(t), Q_{-i}^*(t)] \quad (5)$$

para todo i .

Para o caso do equilíbrio simétrico, $q_i^*(t) = q_j^*(t)$, para todo i, j e, então, $q_i^*(t) = Q^*(t)/n$, para todo i .

O grande problema prático do Equilíbrio de Nash — EN é que geralmente se têm múltiplos ENs. Isso é frequente em jogos dinâmicos. A pergunta natural é: Qual equilíbrio deve prevalecer? Em jogos dinâmicos, o conceito de EN não consegue eliminar várias estratégias não-críveis. É necessário adicionar uma racionalidade sequencial no caminho do equilíbrio. O princípio da racionalidade sequencial estipula que a estratégia de um jogador deve especificar ações ótimas em todos os pontos da árvore de jogos. Para analisar jogos dinâmicos, precisamos do conceito de Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos — ENPS.

Selten (1965) introduziu o conceito de ENPS para jogos dinâmicos. O conceito de ENPS usa o princípio da racionalidade sequencial e o conhecido processo de otimização *backwards* — retroindução. A retroindução estabelece primeiro as estratégias ótimas nos nós terminais e depois estabelece as estratégias ótimas nos nós anteriores. O precursor foi o teorema de Zermelo (1913), que pode ser assim enunciado: “Todo jogo finito de informação perfeita tem um EN em estratégias puras que pode ser obtido através de retro-indução”.

No jogo finito com informação perfeita, o teorema de Zermelo assegura que o ENPS pode ser obtido por retroindução. O ENPS é único caso em que nenhum jogador tem os mesmos resultados em nós terminais quaisquer. Existe uma ligação estreita óbvia entre o conceito de ENPS e o de programação dinâmica: ambos usam otimização via retroindução. Para determinar o ENPS, o

processo inicia-se por meio da procura do(s) EN(s) nos nós terminais. Na sequência, substitui-se esse subjogo pelos resultados do EN e será analisado o subjogo predecessor, procurando o EN, até chegar ao nó inicial. Nos casos de jogos infinitos, a definição de ENPS permanece no sentido de que induz EN em todos os subjogos, apesar de não haver um nó terminal para trabalhar via retroindução.

Dado o estado da natureza representado para o oligopólio pelo preço $P < P^*$ — gatilho —, a estratégia de esperar os preços subirem e “parar a espera” — entrar — em $P = P^*$ é equilíbrio de Nash: desviar dessa estratégia investindo antes — em um $P < P^*$ — é pior para a firma porque ela teria um Valor Presente Líquido esperado negativo. Esperar o preço subir para um valor $P > P^*$ não é factível, pois como as outras — potencialmente infinitas — firmas estão investindo em P^* , o preço nunca subirá acima de P^* . Logo, nenhuma firma unilateralmente tem incentivo para desviar da estratégia de exercer a opção de entrar em $P = P^*$. Assim, é um equilíbrio de Nash o vetor de estratégias onde todas as firmas homogêneas esperam enquanto $P < P^*$ só investem quando P atingir P^* . Como a opção de entrar é perpétua, esse EN ocorre para todo subjogo que começa em qualquer instante de tempo. O que importa é o estado da natureza (P), caracterizando, dessa forma, um equilíbrio de Nash markoviano perfeito em subjogos.

Cada firma depara-se com um problema de programação dinâmica em determinar sua estratégia de investimento ótima, considerando as estratégias de investimento dos demais competidores. O estado da indústria a qualquer instante é totalmente caracterizado pelo vetor $[X(t), q_i(t), \dots, q_n(t)]$, onde os valores iniciais das variáveis são apresentados como $[X, q_i, \dots, q_n]$, onde $X(0) = X$ e $q_i(0) = q_i$, para todo i . A solução para esse problema de programação dinâmica pode ser derivado por meio da teoria de precificação de opções.

Cada firma detém uma sequência de opções para aumentar sua produção, reconhecendo que o exercício das opções de investimento por parte de seus competidores irá impactar seu próprio exercício. Para cada nível de produção q_i a firma tem uma

opção perpétua do tipo americana sobre o fluxo marginal dos lucros por um aumento da produção para $q_i + dq$, com preço de exercício equivalente a $K \times dq$. De forma semelhante, as demais $(n-1)$ empresas detêm opções de elevar sua produção, fato que impacta diretamente os lucros da firma i . Assim, enquanto a firma i controla a evolução do processo $q_i(t)$, reconhece também que a evolução do processo $Q_{-i}(t)$, que está fora de seu controle, ajuda a determinar o retorno do exercício de suas opções de investimento. Tais opções serão exercidas no primeiro momento em que $X(t)$ atingir um gatilho que é função do estado atual da indústria, (q_i, Q_{-i}) .

Supõe-se que os competidores da firma i aumentam sua capacidade a cada momento em que $X(t)$ supera uma dada função gatilho $X^{-i}(q_i, Q_{-i})$, que será descrita como X^{-i} . Seja $F^i[X, q_i, Q_{-i}; X^{-i}]$ o valor da firma i , resultante da estratégia de investimentos dos concorrentes. Considerando o retorno instantâneo de $F^i[X, q_i, Q_{-i}; X^{-i}]$ sobre a região na qual não ocorrem novos investimentos. De acordo com o lema de Itô, a alteração instantânea em F^i é:

$$dF^i = \left[\frac{1}{2} \sigma(X)^2 F_{XX}^i + \mu(X) F_X^i \right] dt + \sigma(X) F_X^i dz \quad (6)$$

Em adição ao ganho de capital, o nível de produção atual da firma i propicia a taxa de fluxo de dividendos de $\pi_i[X, q_i, Q_{-i}]$. No entanto, o retorno total esperado em F^i por unidade de tempo, α_i é:

$$\alpha_i = E \left[\frac{dF^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i}) dt}{F^i} \right] \cdot \frac{1}{dt} \\ = \frac{1}{F^i} \cdot \left[\frac{1}{2} \sigma(X)^2 F_{XX}^i + \mu(X) F_X^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i}) \right] \quad (7)$$

Como o retorno esperado no equilíbrio para esse ativo deve ser igual a r , fazendo α_i igual a r e simplificando os termos, chega-se a seguinte equação diferencial no equilíbrio:

$$0 = \frac{1}{2} \sigma(X)^2 F_{XX}^i + \mu(X) F_X^i - rF^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i}) \quad (8)$$

A solução $F^i[X, q_i, Q_{-i}; X^{-i}]$ para essa equação diferencial deve satisfazer a algumas condições de contorno adequadas. A primeira condição de contorno que F^i deve satisfazer é a de "value-matching". Suponha que a firma i exerça sua opção de expandir no gatilho $X^i(q_i, Q_{-i})$. No momento do exercício, q_i sofre um aumento infinitesimal de dq e a empresa paga o preço de exercício $K \times dq$.

Assim, no instante do exercício, $F^i[X^i(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}; X^{-i}] = F^i[X^i(q_i, Q_{-i}), q_i + dq, Q_{-i}; X^{-i}] - K \times dq$. Dividindo pelo

incremento dq , a condição de *value-matching* pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial F^i}{\partial q_i} [X^i(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}; X^{-i}] = K \quad (9)$$

A segunda condição de contorno que F^i deve satisfazer é a equação que assegura que o gatilho $X^i(q_i, Q_{-i})$ foi escolhido de maneira ótima. A condição de *smooth-pasting* é tal que $F^i_X [X^i(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}; X^{-i}] = F^i_X [X^i(q_i, Q_{-i}), q_i + dq, Q_{-i}; X^{-i}]$. Escrivendo de outra forma, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 F^i}{\partial q_i \partial X} [X^i(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}; X^{-i}] = 0 \quad (10)$$

A última condição de contorno que F^i deve satisfazer é a de *value-matching* para a função disparo dos competidores, $X^{-i}(q_i, Q_{-i})$. No momento do exercício das opções por parte dos concorrentes da firma i , Q_{-i} aumenta por um incremento de dQ_{-i} . Então, no instante do exercício competitivo $F^i[X^i(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}; X^{-i}] = F^i[X^i(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i} + dQ_{-i}; X^{-i}]$. Dividindo pelo incremento dQ_{-i} , essa condição pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial F^i}{\partial Q_{-i}} [X^{-i}(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}; X^{-i}] = 0 \quad (11)$$

Toda a discussão sobre o equilíbrio competitivo está sintetizada no item a seguir.

2. Síntese do modelo de equilíbrio

O valor de equilíbrio de cada firma i será descrito como $V^i(X, q_i, Q_{-i})$. A estratégia de investimento no equilíbrio para cada firma i é caracterizada por meio de uma elevação incremental de sua produção sempre que $X(t)$ atingir o gatilho $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$. As funções $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ e $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$ são soluções da seguinte equação diferencial:

$$0 = \frac{1}{2} \sigma(X)^2 V_{XX}^i + \mu(X) V_X^i - rV^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i}) \quad (12)$$

sujeito a

$$\frac{\partial V^i}{\partial q_i} [\bar{X}(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}] = K \quad (\text{value-matching})$$

$$\frac{\partial^2 V^i}{\partial q_i \partial X} [\bar{X}(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}] = 0 \quad (\text{smooth-pasting})$$

$$\frac{\partial V^i}{\partial Q_{-i}} [\bar{X}(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}] = 0 \quad (\text{value-matching})$$

para a função disparo dos competidores, $X^{-i}(q_i, Q_{-i})$.

Pode-se, agora, caracterizar

completamente o Equilíbrio de Nash para as estratégias de investimento. Como o equilíbrio é simétrico, $X^i(q_i, Q_{-i}) = X^{-i}(q_i, Q_{-i})$, para todo i , e pode ser escrito como o gatilho comum de equilíbrio $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$. Entretanto, a determinação da função de equilíbrio, $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$, é a solução de um problema mais complicado de um ponto fixo em uma função espaço. Para um gatilho competitivo $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$, o gatilho da estratégia ótima para a firma i também é $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$. No entanto, para que $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$ seja o gatilho simétrico de equilíbrio, $F^i[X, q_i, Q_{-i}; \bar{X}]$ deve satisfazer a equação diferencial e as condições de contorno apresentadas acima, onde o gatilho ótimo $X^i(q_i, Q_{-i})$ é igual a $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$, escrevendo o valor da firma i como $V^i(X, q_i, Q_{-i}) = F^i[X, q_i, Q_{-i}; \bar{X}]$.

3. Enfoque simplificado para a derivação do equilíbrio

A determinação do EN para estratégias de exercício de opções é, aparentemente, um problema bem complexo. No equilíbrio, acreditando a firma i que seus competidores irão exercer suas opções no gatilho $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$, ela também exercerá sua opção em $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$. A determinação do equilíbrio parece requerer uma estratégia ótima de exercício que represente uma solução única para as equações diferenciais propostas. Felizmente, esse problema pode ser reduzido a uma forma não mais complexa que uma questão de precificação de opções reais.

Considerando o tempo contínuo e um cenário de equilíbrio perfeitamente competitivo, Leahy (1993) demonstrou que a política de investimento de cada firma é idêntica à estratégia míope, na qual a empresa ignora o efeito que os competidores exercem no preço das opções. Assim, desenvolve-se a estratégia de exercício relacionada ao EN como se fosse determinada por uma firma possuindo uma estratégia míope de exercício das opções reais. Assim, transformamos a curva de demanda das firmas de uma forma peculiar, a fim de obter o equilíbrio em um oligopólio como se a indústria fosse perfeitamente competitiva. Dessa forma, estendemos a solução do problema de otimização individual para o ambiente do oligopólio analisado, determinando o equilíbrio estratégico do exercício das opções a partir de um ambiente competitivo artificial.

Considere uma firma míope i que ignora todo o potencial do exercício competitivo. Isto é, dado o nível atual de oferta competitiva, Q_{-i} , a firma míope assume

que Q_{-i} irá permanecer fixo para sempre. O valor dessa firma míope será descrito como $M^i(X, q_i, Q_{-i})$ e o gatilho para o exercício ótimo será $X^m(q_i, Q_{-i})$. Dessa forma, $M^i(X, q_i, Q_{-i})$ e $X^m(q_i, Q_{-i})$ são determinados simultaneamente como soluções para a seguinte equação diferencial:

$$0 = \frac{1}{2}\sigma(X)^2 M_{XX}^i + \mu(X) M_X^i - r M^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i}) \quad (13)$$

sujeito a

$$\frac{\partial M^i}{\partial q_i} [X^m(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}] = K \quad (\text{value-matching})$$

$$\frac{\partial^2 M^i}{\partial q_i \partial X} [X^m(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}] = 0 \quad (\text{smooth-pasting})$$

Esse sistema é idêntico ao desenvolvido anteriormente para F^i , com exceção de que a condição de *value-matching* para as estratégias de exercício competitivo é ignorada. A solução para $M^i(X, q_i, Q_{-i})$ e seu gatilho associado $X^m(q_i, Q_{-i})$ é a de um problema padrão na literatura de opções reais, consistindo em uma equação diferencial sujeita a uma condição de *value-matching* e a outra de *smooth-pasting*.

A estratégia de exercício para o Equilíbrio simétrico de Nash é caracterizada pelo aumento da oferta de cada firma sempre que $X(t)$ alcance o gatilho míope $X^m(q_i, Q_{-i})$. A dimensão do equilíbrio pode ser reduzida para o caso do equilíbrio simétrico, dado que $q_i^*(t) = q_j^*(t)$, para todo i, j e, então, $q_i^*(t) = Q^*(t)/n$, para todo i . Assim, pode-se escrever a estratégia de exercício no equilíbrio como uma função somente de Q . O gatilho míope pode ser descrito como $X^m(Q/n, [(n-1)/n]Q)$.

De acordo com a crítica apresentada por Back (2007), o problema fundamental para a solução desse tipo de jogo é que ele seria mal definido. Se uma das firmas desviar-se do equilíbrio proposto, não investindo quando o "gatilho" calculado é atingido, o investimento agregado das demais empresas não seria suficiente para refletir o preço nesse gatilho. A estratégia sugerida por Grenadier (2002) exige investimentos discretos equivalentes quando o preço supera a barreira, para que seu valor volte ao nível do gatilho.

Caso somente $n-1$ firmas realizem seus investimentos, o preço permanecerá acima da barreira refletora e a estratégia em equilíbrio demandará investimentos adicionais. Quando esses investimentos serão realizados? Podem ser implementados simultaneamente aos investimentos originais? Uma resposta

afirmativa a essas questões permite que as firmas j condicionem o montante de seus investimentos à impossibilidade de a firma i realizar novos aportes simultaneamente. Isso parece contrário à ideia do equilíbrio para o oligopólio, apesar de considerarmos tal fato como um limite à possibilidade de reação instantânea das empresas, ainda que tal análise ocorra em tempo contínuo.

Adotando essa lógica, as firmas j poderiam reagir no “gatilho” à ineficiência da firma i realizar o investimento a esse preço, ferindo a lógica do equilíbrio para o jogo proposto por Grenadier (2002). O “gatilho” definido representaria um equilíbrio para o oligopólio se for permitido que as firmas j atuem após o desvio provocado pela falta de investimento da firma i , refletindo o preço do ativo analisado.

A crítica de Back (2007) consiste no fato de que, sob essas condições, tais firmas são tomadoras de preço — *price takers* — e não perfeitamente competitivas — míopes — como exposto por Leahy (1993). Dessa forma, considerando a análise em tempo contínuo — investimentos e ganhos infinitesimais —, cada firma seria indiferente a investir no nível do “gatilho”, já que assume que outras firmas irão investir o suficiente para refletir o preço nessa barreira, ainda que ela não invista.

Segundo Back, isso não significa que a competição perfeita é a única forma de equilíbrio para o oligopólio. O equilíbrio proposto por Grenadier (2002) pode ser obtido via punição das firmas que fujam da estratégia apresentada ou que façam algum tipo de associação — colusão. Assim, a(s) empresa(s) que busquem outro tipo de atuação em relação aos concorrentes não ganhariam o suficiente para superar o valor da punição, além da vantagem pretendida com a análise da atuação das demais firmas.

Em resposta a tal crítica relacionada a seu paper, Grenadier (2002) afirma: “Yes, I’m aware of that Back paper. It is entirely incorrect, as it assumes price-taking firms (which has nothing to do with Cournot equilibrium).” Com isso, Grenadier utilizou o conceito do Equilíbrio de Cournot (1838) para apoiar seu modelo de equilíbrio no oligopólio e a solução da equação diferencial baseada em simplificações do modelo para competição perfeita. Cournot afirma que os jogadores escolhem as quantidades ofertadas de forma simultânea e independente, e

o preço em equilíbrio é aquele para o qual as quantidades ofertada e demandada se igualam. A função de reação proposta por Cournot é tal que a produção ótima de uma firma é especificada em função das possíveis produções das demais firmas. Assim, o EN proposto por Grenadier poderia ser aplicado em casos de oligopólio, ainda que apoiado em conceitos relacionados à competição perfeita.

4. Exemplo de obtenção da solução fechada no equilíbrio para o jogo de exercício das opções

No caso base, assume-se especificações típicas tanto para o processo de choque $X(t)$ quanto para a curva de demanda inversa $D(X, Q)$. Tais especificações são comuns na literatura de Opções Reais e teoria dos Jogos. Assume-se também que a função de demanda inversa de mercado é do tipo constante-elástica:

$$P(t) = X(t) \cdot Q(t)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (14)$$

Define-se $\gamma > 1/n$ (nesse estudo $\gamma = 1,5$) para garantir que os ganhos marginais, para um determinado valor de n , são crescentes em X . $X(t)$ representa um choque multiplicativo na demanda e evolui como um movimento Geométrico browniano:

$$dX = \mu X dt + \sigma X dz \quad (15)$$

Assume-se que $r > \mu$ para garantir a convergência do processo. A escolha pelo movimento Geométrico browniano como processo estocástico para representação do choque de demanda será explicado mais tarde no artigo, quando for detalhada a série histórica dos preços dos ativos a serem analisados.

Solucionando a equação diferencial $0 = 1/2\sigma(X)^2 F_{xx} + \mu(X)F_x - rF + Q/n D(X, Q)$, sujeita a condição de contorno $dF/dQ [X^*(Q), Q] = K/n$, o valor de cada firma no equilíbrio, $F(X, Q)$, pode ser expresso como:

$$F(X, Q) = C_1(Q) \cdot X^\beta + \frac{X}{n(r-\mu)} Q^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (16)$$

onde,

$$C_1(Q) = \left(\frac{v_n^{-\beta}}{n} \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma-\beta} \right)$$

$$\left[K - \left(\frac{v_n}{r-\mu} \right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \right] \cdot Q^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma}} \quad (17)$$

O gatilho para o investimento no equilíbrio, $X^*(Q)$, pode ser expresso da seguinte forma:

$$X^*(Q) = v_n \cdot Q^{\frac{1}{\gamma}} \quad (18) \quad \text{onde,}$$

$$v_n = \left(\frac{\beta}{\beta-1} \right) \left(\frac{n\gamma}{n\gamma-1} \right) (r-\mu) \cdot K \quad (19)$$

$$\beta = \frac{-(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sqrt{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} > 1 \quad (20)$$

5. Análise do mercado imobiliário residencial na cidade do rio de janeiro

a) Introdução

Nessa seção, serão realizadas análise e aplicação empírica do modelo desenvolvido anteriormente, para o caso específico do mercado imobiliário residencial na cidade do Rio de Janeiro. Para tanto, cada parâmetro do modelo será devidamente estimado e, para aqueles parâmetros onde não for possível estimar ou encontrar uma boa *proxy*, um valor inicial arbitrário será atribuído. Todavia, como um dos objetivos do presente trabalho é verificar a compatibilidade do modelo teórico aqui desenvolvido com a realidade, uma ferramenta essencial é a estimação do ciclo real de negócios do mercado imobiliário para a cidade do Rio de Janeiro, pois, uma vez de posse desse resultado, poderemos averiguar se os períodos de aquecimento desse mercado, conforme previsto pelo modelo, são compatíveis com os períodos de aquecimento encontrados na realidade.

b) Estimando o movimento browniano Geométrico

i) Parâmetros do processo de preços de venda dos imóveis

Uma das principais hipóteses do modelo utilizado nesse trabalho é que o fluxo de caixa analisado segue um MGB. Considerando, então, como fluxo de caixa a receita da venda das unidades da propriedade, para estimarmos tanto a expectativa quanto a variância da taxa de crescimento do fluxo de caixa, isto é, μ e σ , respectivamente, utilizamos uma série de valores mensais médios, com início em março de 2003 e término em março de 2006, para os preços de venda de imóveis residenciais

por bairros e tipo de apartamento na cidade do Rio de Janeiro, divulgado pelo Sindicato das Empresas de Compra, Venda, Locação e Administração de Imóveis e dos Condomínios Residenciais e Comerciais do Estado do Rio de Janeiro — Secovi-RJ, representante legal dos condomínios e das administradoras de imóveis nessa região.

Os valores dessa série são calculados retirando-se a média aritmética de todos os preços de oferta de venda de imóveis por bairros e por tipo de apartamento em um determinado mês do ano, anunciados nos Classificados do Jornal O Globo, veículo de imprensa escrita de maior circulação na cidade do Rio de Janeiro. Infelizmente, as séries não possuem nenhum tipo de equalização nos dados, contabilizando, da mesma forma, unidades de apartamentos de diferentes idades, localização e andar. Como consequência, podem existir meses nas séries onde os valores possuem uma variação acima do normal, deixando de refletir uma real variação nos preços de venda dos imóveis.

Como estimativa da volatilidade do fluxo de caixa (σ), foi utilizado o estimador não viesado da variância. As estimativas dos parâmetros foram realizadas após retirar a primeira diferença do logaritmo natural das séries, como descrito nas equações abaixo.

Se os preços seguem um MGB (μ , σ), isso implica na seguinte equação em tempo discreto:

$$\ln(P_t) = a + \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (21)$$

Para seqüências i.i.d. $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0, \sigma^2/N)$; para dados diários, $N = 252$ – dias úteis – e para dados mensais, $N = 12$. Assim,

$$\text{Var}[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] = \text{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2/N \quad (22)$$

$$\sigma^2 = N \text{Var}[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] \quad (23)$$

Para a obtenção da tendência neutra ao risco (μ), foi utilizada a relação entre o retorno do investimento, ganho de capital e distribuição de dividendos.

Taxa de retorno total (ρ) = taxa de ganho de capital (α) + taxa de dividendos (δ)

A taxa de retorno total (ρ) pode ser definida como a soma da taxa de juros livre de risco (r) e o prêmio de risco (π). Assim,

$$r + \pi = \alpha + \delta \quad (24)$$

Trabalhando as duas equações para o retorno total (ρ), obtém-se a seguinte importante relação:

$$\alpha - \pi = r - \delta \quad (25)$$

Em outras palavras, a tendência (α) penalizada pelo prêmio de risco (π) é igual à taxa livre de risco (r) menos a taxa de dividendos (δ). Essa tendência $\alpha - \pi$ é chamada tendência neutra ao risco (μ). Assim, $r - \delta$ também é uma tendência neutra ao risco.

Para o caso do mercado imobiliário, a taxa de dividendos será calculada por meio da relação entre os benefícios obtidos pelo proprietário ao alugar seu apartamento e o valor do imóvel. Esses benefícios são resumidos na taxa de aluguel cobrada ao inquilino e na taxa de condomínio que o proprietário deixa de pagar devido ao aluguel da unidade.

$$\delta \text{ (taxa anual)} = \frac{\text{valor do aluguel (anual)} + \text{valor do condomínio (anual)}}{\text{valor do imóvel}} \quad (26)$$

Para justificar a escolha do MGB como processo estocástico para descrição de $P(t)$, realiza-se o teste da raiz unitária de Dickey-Fuller. Conforme exposto adiante, esse teste pode confirmar a adequação do MGB à evolução da série de preços do ativo analisado.

Seja $P(t)$ o preço no instante t . O primeiro passo para a realização do teste de Dickey-Fuller engloba a busca dos dados — série temporal — e o cálculo dos logaritmos $\ln(P_t)$. Se os preços seguem um MGB (α, σ), isso implica na seguinte equação em tempo discreto:

$$P_t = a + \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (27)$$

O MGB pode ser testado, por exemplo, analisando a hipótese do coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ nessa regressão ser unitário. Esse é o chamado teste da raiz unitária de Dickey-Fuller. No caso do processo estocástico conhecido como de reversão à média, o coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ na equação anterior será menor que um. Seja a equação mais geral:

$$P_t = a + b \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (28)$$

Ao invés de estipular $b = 1$, observa-se os dados utilizados para a regressão acima,

de forma a obter o coeficiente angular da equação (valor de b). Caso $0 < b < 1$, teremos indícios de reversão à média. Assim, faz-se a seguinte regressão entre $[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})]$ versus $\ln(P_{t-1})$:

$$\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = a + (b - 1) \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (29)$$

No caso da série de preços utilizada para os bairros de Copacabana/Leme — apartamentos de dois quartos — e Botafogo/Humaitá — apartamentos de três quartos — na cidade do Rio de Janeiro, as estatísticas descritivas obtidas após a realização do teste da raiz unitária estão apresentadas nos quadros abaixo. Esses resultados foram encontrados com a ajuda do *software* Gretl, a partir dos dados mensais de preços para o período entre maio de 2003 e junho de 2007 – cinquenta observações.

Quadro 1 Teste Dickey-Fuller para dados mensais de preços de imóveis de dois quartos nos bairros de Copacabana e Leme na cidade do Rio de Janeiro – período entre maio de 2003 e junho de 2007.

Copacabana/ Leme 2Q	Variável	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t (p valor)
	$\ln(P_t)$	0,001	0,002	0,420

Quadro 2 Teste Dickey-Fuller para dados mensais de preços de imóveis de três quartos nos bairros de Botafogo e Humaitá na cidade do Rio de Janeiro – período entre maio de 2003 e junho de 2007.

Botafogo/ Humaitá 3Q	Variável	Coefficiente	Erro padrão	Estatística t (p valor)
	$\ln(P_t)$	0,001	0,002	0,631

Teste Dickey-Fuller aumentado, sem constante, de ordem 1, para variável $\ln(P_t)$

Dimensão de amostragem: cinquenta observações

Hipótese nula de raiz unitária: $b = 1$

Esses resultados não refutam a hipótese nula de raiz unitária $b=1$. Dessa forma, o MGB pode ser utilizado como processo estocástico para a série de preço dos ativos considerados, pois não há indícios de reversão à média.

Na tabela 1 abaixo, encontram-se os valores das estimativas tanto das expectativas das taxas de crescimento anual neutra ao risco dos preços dos imóveis (μ) como das volatilidades (σ), para apartamentos de dois quartos em Copacabana/Leme e apartamentos de três quartos em Botafogo/Humaitá, bairros da cidade do Rio de Janeiro. Além disso, estão incluídas a taxa de juros livre de risco (r) e a taxa de dividendos para o caso desses dois bairros (δ).

Tabela 1 Estimativas das taxas de crescimento anual neutro ao risco (μ) e das volatilidades anuais (σ) dos preços de venda dos imóveis na cidade do Rio de Janeiro. Taxa de juros livre de risco $\Rightarrow r = 12\%$ ao ano.

Bairro	Tendência neutra ao risco (μ)	Desvio (σ)	Dividendos (δ)
Copacabana/Leme (2Q)	3,95%	4,85%	8,05%
Botafogo/Humaitá (3Q)	5,25%	2,15%	6,75%

ii) Parâmetros do processo de custo de construção

Para estimar os parâmetros que descrevem o custo de construção por densidade, α e σ respectivamente, vamos utilizar uma série de valores mensais — média — do custo unitário básico médio por metro quadrado de construção por metro quadrado para a cidade do Rio de Janeiro —, CUB médio-RJ, divulgado pelo Sindicato da Indústria da Construção Civil no Estado do Rio de Janeiro – Sinduscon/RJ com início em março de 2003 e término em março de 2006. A Sinduscon/RJ é responsável pelo fortalecimento institucional do setor, promovendo ações concretas voltadas para o bem-estar da população e dos trabalhadores da indústria da construção. É o órgão que divulga essas séries de custo de construção para diversos projetos-padrão representativos. A série escolhida para estimação dos parâmetros foi a de um apartamento em edifício com oito pavimentos, dois quartos, padrão de acabamento normal. Essa série foi a escolhida, pois é a mais amplamente utilizada como preço médio do metro quadrado na cidade do Rio de Janeiro. Foi

retirada a primeira diferença do logaritmo natural das séries e estimadores tanto para variância quanto para taxa de crescimento real do custo de construção. Na tabela 2, encontram-se os valores dos parâmetros α e σ , respectivamente, estimados utilizando-se a série do CUB médio-RJ.

Tabela 2 Estimativas das taxas de crescimento anual (α) e das volatilidades anuais (σ) dos custos de construção dos imóveis na cidade do Rio de Janeiro a partir da série do CUB médio-RJ.

Índice	Tendência (α)	Desvio (σ)
CUB - RJ	8,30%	0,22%

No intuito de simplificar a resolução das equações diferenciais nesse trabalho, consideramos um valor constante para o custo de construção por densidade (K).

iii) Retorno do ativo livre de risco (r)

Como *proxy* para o retorno do ativo livre de risco vamos utilizar o valor atual da taxa Selic – divulgada pelo Banco Central do Brasil – que é de 12% ao ano, considerando a tendência de estabilização das principais variáveis macroeconômicas do país. A Selic representa a taxa básica de juros da economia, utilizada nos empréstimos interbancários e como referência para desconto de fluxos financeiros “livres de risco”.

c) Desenvolvimento e principais resultados do modelo

Algumas considerações sobre o desenvolvimento do modelo devem ser feitas antes de passarmos especificamente para a análise dos resultados. Como tanto o fluxo de caixa oriundo da venda das unidades construídas como o custo de construção são medidos por densidade e unidade de tempo, para tornar o fluxo de caixa anual vamos considerar que os prédios estão sendo vendidos via financiamento de dez anos, enquanto o custo de construção é pago integralmente no primeiro ano do processo de construção. Logo, para transformar a receita da venda dos imóveis em um fluxo

de caixa anual basta calcular 10% do preço de venda integral do imóvel. No entanto, os resultados foram apresentados em termos de valor integral da venda em relação ao valor integral do custo de construção.

Já para tornarmos tanto o preço de venda dos imóveis como o custo de construção por densidade, realizamos os seguintes cálculos:

Preço de venda por densidade = (Preço de venda por unidade) / (Tamanho médio da unidade em m²) x (Lote Mínimo em m²)

Custo de construção por densidade = (custo de construção por m²) x (lote mínimo em m²)

Feitas essas considerações iniciais, estamos aptos para analisar os resultados. Inicialmente vamos considerar o modelo básico sem incluir impostos e tempo de construção.

d) Resultados médios

Para o cálculo da tabela 3, utilizamos os parâmetros – tanto para o desvio padrão como para taxa de crescimento neutra ao risco – para apartamentos de dois quartos em Copacabana/Leme e apartamentos de três quartos em Botafogo/Humaitá, bairros da cidade do Rio de Janeiro.

Os valores de Y(0) representam as condições iniciais para a relação entre o preço de venda e o custo de construção por densidade para cada um dos tipos de apartamentos. Os valores críticos Y*(Q) representam o primeiro “gatilho” para cada uma das regiões descritas, ou seja, a relação entre o preço de venda e o custo de construção por densidade que provocará o primeiro aumento na oferta de apartamentos por intermédio da construção de novas unidades.

Esses valores críticos Y*(Q) podem ser obtidos pelas equações (19) e (20), relacionando o preço de venda no “gatilho” v_n e o custo de construção por densidade K.

$$v_n = \left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right) \left(\frac{n\gamma}{n\gamma - 1} \right) (r - \mu) \cdot K \quad (19)$$

$$\beta = \frac{-(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sqrt{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} > 1 \quad (20)$$

Tabela 3 Valores iniciais e críticos para a relação entre preços de venda e custos de construção por densidade dos imóveis na cidade do Rio de Janeiro.

Bairro	Valores iniciais (Y(0))	Valores críticos (Y*(Q))
Copacabana/Leme (2Q)	3,00	2,85
Botafogo/Humaitá (3Q)	3,00	2,78

Por meio dos dados apresentados na tabela 3, pode-se observar que novas construções só deverão ser realizadas quando o preço de venda atingir algo próximo a 2,8 vezes o valor do custo de construção.

Esse resultado pode ser comparado com os valores encontrados no mercado da cidade do Rio de Janeiro, mas especificamente nas regiões de Copacabana/Leme e Botafogo/Humaitá. Os preços de venda e custos de construção dos apartamentos dessas regiões – entre março de 2003 e março de 2006 – foram utilizados para a obtenção dos parâmetros das tabelas anteriores. Para facilitar essa comparação, as tabelas 4 e 5, expostas adiante, apresentam os preços de venda e custos de construção por metro quadrado para esses bairros entre os anos de 2003 e 2006. Observados esses valores mensais, pode-se deduzir que os preços de venda durante aquele período giravam em torno de 4 vezes os custos de construção. Tais valores diferem bastante do resultado esperado via solução das equações diferenciais obtidas para a construção da tabela 3.

Essa aparente incoerência entre os dados reais e a solução sugerida pela teoria pode ser resultado de outros custos envolvidos no mercado imobiliário. Durante a construção das unidades, os agentes responsáveis — incorporadoras e construtoras — devem lidar com custos de divulgação e tributos não incluídos nos custos de construção considerados anteriormente. Além disso, esses agentes lidam também com um tempo não nulo entre o início das construções e a venda das unidades, comprometendo o fluxo de caixa esperado. Todos esses fatores obrigam as construtoras a compensar tais custos com ajuda do aumento dos preços de venda das unidades para manter a rentabilidade esperada.

Tabela 4 Relação entre preços de venda e custos de construção por metro quadrado dos imóveis na cidade do Rio de Janeiro – dados reais obtidos entre março 2003 e março 2006. Bairros de Copacabana e Leme – apartamentos de sala e dois quartos.

Mês	Preço/m ² em Reais	CUB médio/ m ² em Reais	Relação Preço/CUB
mar/03	3.077,36	699,64	4,40
abr/03	3.048,83	703,19	4,34
mai/03	3.031,33	708,98	4,28
jun/03	3.119,61	712,31	4,38
jul/03	3.007,40	712,37	4,22
ago/03	3.135,73	734,44	4,27
set/03	3.001,53	734,68	4,09
out/03	3.120,23	737,09	4,23
nov/03	3.225,13	738,12	4,37
dez/03	3.328,25	739,52	4,50
jan/04	3.116,03	740,26	4,21
fev/04	3.268,56	742,56	4,40
mar/04	3.338,24	777,45	4,29
abr/04	3.398,83	777,85	4,37
mai/04	3.153,71	781,55	4,04
jun/04	3.090,68	786,56	3,93
jul/04	3.375,29	788,38	4,28
ago/04	3.734,84	793,43	4,71
set/04	3.339,44	795,32	4,20
out/04	3.476,24	799,07	4,35
nov/04	3.478,05	806,77	4,31
dez/04	3.459,19	813,11	4,25
jan/05	3.137,23	813,47	3,86
fev/05	3.465,11	816,11	4,25
mar/05	3.605,03	860,55	4,19
abr/05	3.776,56	861,18	4,39
mai/05	4.428,75	867,68	5,10
jun/05	4.352,49	867,26	5,02
jul/05	3.919,07	861,33	4,55
ago/05	3.737,75	860,39	4,34
set/05	3.554,37	857,37	4,15
out/05	3.584,52	852,25	4,21
nov/05	3.337,03	853,63	3,91
dez/05	3.713,72	854,55	4,35
jan/06	3.693,33	855,87	4,32
fev/06	3.752,52	857,48	4,38
mar/06	4.080,00	894,35	4,56

Tabela 5 Relação entre preços de venda e custos de construção por metro quadrado dos imóveis na cidade do Rio de Janeiro – dados reais obtidos entre março 2003 e março 2006. Bairros de Botafogo e Humaitá – apartamentos de sala e três quartos.

Mês	Preço/m ² em Reais	CUB médio/ m ² em Reais	Relação Preço/CUB
mar/03	2.922,18	699,64	4,18
abr/03	2.830,00	703,19	4,02
mai/03	2.914,05	708,98	4,11
jun/03	3.048,44	712,31	4,28
jul/03	2.939,34	712,37	4,13
ago/03	2.905,30	734,44	3,96
set/03	3.021,38	734,68	4,11
out/03	3.006,34	737,09	4,08
nov/03	2.869,93	738,12	3,89
dez/03	3.083,33	739,52	4,17
jan/04	2.951,52	740,26	3,99
fev/04	2.895,08	742,56	3,90
mar/04	2.995,09	777,45	3,85
abr/04	2.784,61	777,85	3,58
mai/04	2.922,25	781,55	3,74
jun/04	2.998,15	786,56	3,81
jul/04	2.951,22	788,38	3,74
ago/04	2.946,47	793,43	3,71
set/04	3.070,63	795,32	3,86
out/04	2.930,07	799,07	3,67
nov/04	2.898,65	806,77	3,59
dez/04	2.905,91	813,11	3,57
jan/05	2.862,77	813,47	3,52
fev/05	3.080,00	816,11	3,77
mar/05	3.454,42	860,55	4,01
abr/05	3.310,87	861,18	3,84
mai/05	3.350,75	867,68	3,86
jun/05	3.396,82	867,26	3,92
jul/05	3.113,53	861,33	3,61
ago/05	3.137,94	860,39	3,65
set/05	3.169,72	857,37	3,70
out/05	3.226,80	852,25	3,79
nov/05	3.265,25	853,63	3,83
dez/05	3.223,24	854,55	3,77
jan/06	3.384,89	855,87	3,95
fev/06	3.440,39	857,48	4,01
mar/06	3.328,70	894,35	3,72

e) Compatibilidade do modelo com o ciclo real de negócios do mercado imobiliário

A estimação do ciclo de negócios do mercado imobiliário na cidade do Rio de Janeiro e a comparação com os resultados obtidos com a utilização do modelo mencionado podem trazer importantes informações para as empresas envolvidas nesse mercado. A razão para essa análise é que, uma vez de posse do ciclo de negócios para o mercado imobiliário e, comparando os resultados do modelo com a evolução da razão y — razão entre fluxo de caixa por densidade anual por custo de construção também por densidade anual —, obteremos os momentos ótimos para construção segundo modelo e, então, poderemos verificar se esses momentos são compatíveis com os períodos de aquecimento do mercado imobiliário conforme descrito pelos ciclos.

A série escolhida para estimar o ciclo de negócios do mercado imobiliário é a de proporção da população ocupada por setor de atividade e região metropolitana segundo a Pesquisa Mensal de Emprego — PME divulgada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística — IBGE, órgão responsável pela divulgação de pesquisas econômicas e indicadores sociais brasileiros. Essa é uma série mensal, com início em março de 2003 e término em março de 2006, que apresenta a relação entre o número de pessoas ocupadas em um determinado setor — indústria de transformação, comércio, construção civil, serviços ou outras atividades — e o número de pessoas ocupadas, em um determinado período de referência. Vamos então focar na proporção da população ocupada na construção civil para a cidade do Rio de Janeiro.

Observando os gráficos da evolução do y por zonas, nota-se que o y em algumas datas está acima da cada y^* (gatilhos) encontrados, indicando um período de aquecimento do mercado imobiliário uma vez que para $y > y^*$ vale a pena para o investidor construir.

Realizando uma análise similar para as demais datas críticas, não conseguimos observar pelos gráficos 1 e 2 uma relação direta entre o aquecimento do mercado imobiliário na cidade do Rio de Janeiro, dado pela PME, e as boas oportunidades de construção para as empresas do mercado,

representadas pelos instantes onde $y > y^*$. Observações de um período de tempo mais longo e de outros bairros da cidade do Rio de Janeiro podem ser úteis para uma melhor comparação do modelo com a realidade do mercado de construção.

Gráfico 1 Evolução do ciclo real de negócios do mercado imobiliário na cidade do Rio de Janeiro entre março de 2003 e março de 2006 — bairros Copacabana/Leme.

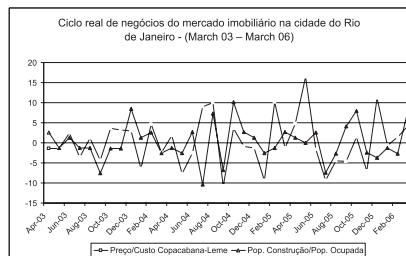
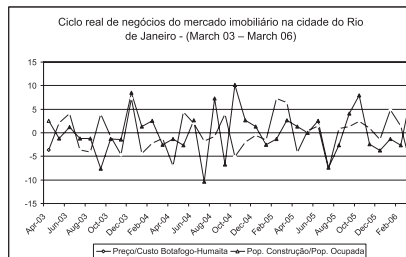


Gráfico 2 Evolução do ciclo real de negócios do mercado imobiliário na cidade do Rio de Janeiro entre março de 2003 e março de 2006 — bairros Botafogo/Humaitá.



6. Conclusões

Investimentos no mercado imobiliário caracterizam-se como intensivos em capital, com baixa liquidez e retornos muito lentos, considerando-se, ainda, as incertezas existentes na demanda, preço dos imóveis e custo dos terrenos e construção que elevam o risco percebido pelos investidores. Dessa forma, as opções embutidas nesse tipo de investimento trazem bastante valor aos projetos, reduzindo sua exposição excessiva ao risco.

Esse estudo mostra como a metodologia de Opções Reais e teoria dos Jogos pode colaborar na análise financeira de investimentos no mercado imobiliário, dando suporte ao processo de tomada de decisão por parte dos gestores, analisando as diferentes opções e tipos de incerteza embutidos tanto em seus projetos como naqueles dos concorrentes. Por meio da utilização de

parâmetros de custo e preço dos imóveis, o modelo pretende determinar a estratégia ótima de investimentos, considerando o momento ideal para o desembolso. Essa estratégia depende da relação entre o preço de venda e custo de construção para cada investidor — gatilho —, além do número de concorrentes ativos no mercado.

Os dados utilizados nesse estudo são relativos a imóveis existentes na cidade do Rio de Janeiro, considerando preços e custos nos

últimos três anos. Os resultados obtidos para imóveis localizados em duas diferentes regiões da cidade mostram que novos investimentos só deveriam ser iniciados quando o preço de venda atingisse algo em torno a 2,8 vezes o valor do custo de construção. Para que o modelo representasse de forma mais consistente a realidade do ciclo de negócios do mercado imobiliário da cidade, seria necessária a utilização de uma base de dados mais extensa, além de valores relativos às demais regiões da cidade pesquisada.

Referências

- BACK, K. Issues in option exercise games. **Working Paper**, Mays Business School, Texas A&M University, College Station, 2007.
- BERGSTROM, T. C.; VARIAN, H. R. Two remarks on cournot equilibria. **Economic Letters**, v. 19, p. 5-8, 1985.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. Evaluating natural resource investment. **Journal of Business**, v. 58, n. 2, p. 135-157, 1985.
- CAPOZZA, D.; YUMING L. The intensity and timing of investment: the case of land. **American Economic Review**, v. 84, p. 889-904, sept. 2004.
- DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment under uncertainty**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
- GRENADIER, S. R. Valuing lease contracts: a real-options approach. **Journal of Financial Economics**, v. 38, p. 297-331, 1995 a.
- GRENADIER, S. R. Strategic exercise of options: development cascades and overbuilding in real estate markets. **Journal of Finance**, v. 51, n. 5, p. 1653-1679, dec. 1996.
- GRENADIER, S. R. Equilibrium with time-to-build: a real options approach In: BRENNAN; TRIGEORGIS. (Ed.). **Project flexibility, agency, and competition**. Oxford University Press, p. 275-296, 2000.
- GRENADIER, S. R. Option exercise games: an application to the equilibrium investment strategies of firms. **Review of Financial Studies**, v. 15, p. 691-721, summer 2002.
- GRENADIER, S. R. An equilibrium analysis of real estate leases. **NBER Working Paper**, n. 9475, jan. 2003.
- HOLLAND, A. S.; OTT, S. H.; RIDDIOUGH, T. J. The role of uncertainty in investment: an examination of competing investment models using commercial real estate data. **Real Estate Economics**. v. 28, n. 1; ABI/INFORM Global p. 33, spring 2000.
- LAMBRECHT, B.; PERRAUDIN, W. Real options and preemption under: incomplete information In: 3rd ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON REAL OPTIONS, Wassenaar, The Netherlands, june 1999. **Anais...** The Netherlands, december 1998.
- LEAHY, J. V. Investment in competitive equilibrium: the optimality of myopic behavior. **Quarterly Journal of Economics**, p. 1105-1133, 1993.
- LEUNG, B. Y. P.; HUI, E. C. M. Option pricing for real estate development: Hong Kong Disneyland. **Journal of Property Investment & Finance**, v. 20, n. 6, ABI/INFORM, p. 473, 2002.
- MERTON, R. C. An intertemporal capital asset pricing model. **Econometrica**, v. 41, n. 5, p. 867-887, sep. 1973.
- Mc DONALD, R. L.; SIEGEL, D. R. The value of waiting to invest. **Quarterly Journal of Economics**, v. 101, p. 707-727, nov. 1986.
- SLADE, M. What does an oligopoly maximize. **Journal of Industrial Economics**, v. 42, p. 45-61, 1994.
- SELTEN, R. **Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfragetragheit**. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, p. 121; 301-324; 667-689, 1965.
- SPENCE, M. The implicit maximization of a function in monopolistically competitive markets. **Harvard Institute of Economic Research**, Discussion Paper n. 461, 1976a.
- SPENCE, M. Product selection, fixed costs, and monopolistic competition. **Review of Economic**

Studies, v. 43, p. 217-235, 1976b.

TITMAN. Urban land price under uncertainty. *The American Economic Review*, v. 75, n. 3, p. 505-514, 1985.

TRIGEORGIS, L. *Real options, managerial flexibility and strategy in resource allocation*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1996.

WILLIAMS, J. T. Real estate development as an option. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, v. 4, n. 2, p. 191-208, 1991.

WILLIAMS, J. T. Equilibrium and options on real assets. *Review of Financial Studies*, v. 6, n. 4, p. 825-850, Winter 1993.

YAMASAKI, R. Empirical testing of real option pricing models using land price index in japan, *Journal of Property Investment & Finance*, v. 19, n. 1, ABI/INFORM Global, p. 53, 2001.

ZERMELO, E. Über eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels. In: HOBSON, E. W.; LOVE, A. E. H. (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*. Cambridge: Cambridge University Press, 1913. v. II. p. 501-504.

Anexo 1 Solução da equação diferencial – metodologia de Grenadier

$$P(t) = X(t) \cdot Q(t)^{-1/\gamma}$$

$$V(X, Q) = [C(Q) X^\beta] + [(XQ^{(\gamma-1)/\gamma}) / n(r - \mu)]$$

$$V_x = C \beta X^{\beta-1} + [(Q^{(\gamma-1)/\gamma}) / n(r - \mu)]$$

$$V_{xQ} = C_Q \beta X^{\beta-1} + [(\gamma - 1) / \{(\gamma n) (r - \mu) \}] (Q^{-1/\gamma}) = 0$$

$$C_Q = [-(\gamma - 1) / \{(\gamma n) (r - \mu) \}] (Q^{-1/\gamma}) [(1/\beta) X^{1-\beta}] \quad (1)$$

$$V(X, Q) = [C(Q) X^\beta] + [(XQ^{(\gamma-1)/\gamma}) / n(r - \mu)]$$

$$V_Q = K$$

$$V_Q = C_Q X^\beta + [X / \{n(r - \mu)\}] [\{(\gamma - 1) / (\gamma)\} (Q^{-1/\gamma})] = K$$

$$C_Q = \{K + [(1 - \gamma) / (\gamma)] [X / \{n(r - \mu)\}] [(Q^{-1/\gamma})]\} [X^{-\beta}] \quad (2)$$

Igualando (1) e (2):

$$[-(\gamma - 1) / \{(\gamma n) (r - \mu) \}] (Q^{-1/\gamma}) [(1/\beta) X^{1-\beta}] = \{K + [(1 - \gamma) / (\gamma)] [X / \{n(r - \mu)\}] [(Q^{-1/\gamma})]\} [X^{-\beta}]$$

Usando $P(t) = X(t) \cdot Q(t)^{-1/\gamma}$, teremos:

$$[(1 - \gamma) / \{(\gamma n(r - \mu))(\beta)\}] P = K + [(1 - \gamma) / (\gamma)] [P / \{n(r - \mu)\}]$$

$$P [(1 - \gamma) / \{ \gamma n(r - \mu) \}] [1/\beta - 1] = K$$

$$P = (r - \mu) K [\gamma n / (\gamma - 1)] [\beta / (\beta - 1)] \quad (3)$$

Para obtermos o valor de $C(Q)$, utilizaremos a equação (2) e a igualdade

$P(t) = X(t) \cdot Q(t)^{-1/\gamma}$. Assim,

$$C_Q = \{K - [(\gamma-1) / (\gamma)] [P / \{n(r - \mu)\}]\} [X^{-\beta}]$$

$$C_Q = \{K - [(\gamma-1) / (\gamma)] [P / \{n(r - \mu)\}]\} [P^{-\beta} Q^{-\beta/\gamma}]$$

$$C(Q) = \{K - [(\gamma-1) / (\gamma)] [P / \{n(r - \mu)\}]\} [P^{-\beta}] [(\gamma) / (\gamma - \beta)] [Q^{(\gamma-\beta)/\gamma}] \quad (4)$$