Editora Universa

RBEE

Independência do Banco Central*

Resumo: Apresenta-se um modelo estilizado, em que o banco central, o atual governo e o eleitor mediano interagem estratégica e repetidamente. No caso de independência total, o banco central sempre consegue implementar um equilíbrio em que a política monetária é austera e benéfica a longo prazo. Em contrapartida, no caso em que o banco central dispõe apenas de autonomia operacional, uma população suficientemente impaciente pode impor um equilíbrio perverso, no qual o governo e o banco central coordenam suas ações de forma a conduzir uma política econômica que induz um aquecimento econômico de curto prazo às custas de maior inflação e desemprego a longo prazo.

Palavras-chave: política monetária, inflação, independência, banco central.
Classificação JEL: E42, E52, E58, P48.

Abstract: A stylized model is presented in which the central bank, the current government and the median voter interact strategically and repeatedly. If the central bank is completely independent, it can always implement an equilibrium in which the monetary policy is tight and beneficial in the long run. However, if the central bank has only operational autonomy, then a sufficiently impatient population may impose a bad equilibrium in which the government and the central bank coordinate their actions to run a loose economic policy that benefits short run economic growth at the expense of higher inflation and unemployment in the long run.

Keywords: monetary policy, inflation, independence, central bank.
JEL Classification: E42, E52, E58, P48.

José A. Rodrigues-Neto
jose.neto@anu.edu.au – Australian National University – School of Economics – College of Business and Economics – H.W. Arndt Building 25A – Canberra – ACT – 0200 – Australia

Rogério Mazali
rmazali@tulane.edu – Tulane University – A. B. Freeman School of Business – 451 Goldring/Woldenberg Hall – 7 McAlister Drive – New Orleans, LA – 70118 – USA

* Ambos os autores agradecem os ótimos comentários de Benjamin Tabak, Danilo Coelho, do(s) revisor(es) anônimo(s) e do editor deste periódico. Todos os possíveis erros restantes são de nossa inteira responsabilidade.

1 Introdução

Desde os anos 80, diversos países, como Chile, Espanha, França, Nova Zelândia e Reino Unido, têm realizado mudanças na legislação de modo a tornar seus bancos centrais mais independentes. De fato, existem muitos argumentos a favor e contra a independência de bancos centrais. Friedman (1968) argumenta a favor de bancos centrais dependentes, para evitar que a sociedade fique à mercê das arbitrariedades de uma autoridade monetária, cujos incentivos não estão vinculados ao bem-estar social. Keynesianos, como Cukierman (1992) e Alesina e Summers (1993), defendem um razoável grau de independência para bancos centrais, que teriam como objetivo coordenar algumas políticas com seus respectivos tesouros[1].

A justificativa para uma maior autonomia da autoridade monetária se fortalece com a implementação de um sistema de metas para a inflação, pois, nesse regime de política monetária, o objetivo primário da autoridade monetária é manter a estabilidade de preços[2]. Além disso, a fixação da taxa de juros básica em um nível adequado seria a forma de atingir-se essa estabilidade.

O regime de metas foi adotado por muitas nações com o objetivo de estabilizar a economia. Quando foi introduzido, a partir do início dos anos 90, diminuiu, de modo geral, a variabilidade e o nível das taxas de inflação nos países que o adotaram. No entanto, certas condições preliminares devem ser atendidas para que se obtenham bons resultados. A principal delas é que não pode haver dominância fiscal, isto é, a política monetária nunca deve ser constrangida pela política fiscal. Essa é uma das principais justificativas teóricas que a literatura apresenta na defesa da independência de bancos centrais[3].

Neste trabalho, a análise da independência da autoridade monetária em relação ao poder executivo será feita à luz da teoria dos jogos. Cabe lembrar que a principal função da teoria dos jogos não é fazer previsões quantitativas, nem estender modelos microfundamentados, mas simplesmente explicitar e disciplinar a discussão de algumas das interações estratégicas relevantes[4].

Formalmente, construir-se-á um superjogo, isto é, um jogo com infinitas repetições[5]. Nesse superjogo, a autoridade monetária, o governo e o eleitor mediano interagem estrategicamente. Existindo um *trade-off* de curto prazo entre inflação e desemprego, os agentes poderão ter visões diferentes acerca de qual seria a melhor política econômica a ser adotada.

Será visto que, se o eleitor mediano for suficientemente impaciente, o governo der suficiente importância à sua própria reeleição e o banco central tiver grau de autonomia suficientemente baixo, então existirá um equilíbrio em que o eleitor mediano tentará punir o governo e o banco central que não adotam sua política preferida. O instrumento de coerção é o voto contrário nas próximas eleições. O governo pode, eventualmente, ceder à pressão do eleitor mediano, mesmo que pense inicialmente em implementar um regime austero de controle inflacionário. Isso ocorrerá especialmente se o governo for muito paciente e, conseqüentemente, tiver grande desejo de reeleger-se (ou de eleger seu sucessor).

O comportamento do banco central será analisado em duas circunstâncias: tendo apenas autonomia operacional, o que significa que seus *payoffs* são correlacionados com os do atual governo; ou tendo independência, caso limite em que seus *payoffs* são completamente ligados ao bem-estar social de longo prazo, sem ligações diretas com o atual comando do poder executivo. O modelo a ser estudado mostrará as condições nas quais um banco central que não tenha total independência poderia ser capturado por um eleitor mediano impaciente. Isso ocorrerá via influência do eleitor sobre o governo que, por sua vez, forçará o banco central a adotar as políticas preferidas pelo eleitor, o que pode não maximizar o bem-estar social.

Obviamente não se pretende aqui esgotar o tema, nem recomendar decisivamente um certo arranjo institucional sem se considerar outros fatores. Por exemplo, em um país que tenha seu banco central independente, quem escolherá seus diretores? Como se pode ter os incentivos corretos para que tal escolha seja baseada em mérito e critérios técnicos e não meramente políticos ou casuísticos? A próxima seção descreve formalmente o superjogo; a seção 3 estuda o equilíbrio com captura e a última seção conclui.

[1] Veja também o argumento de Gordon e Barro (1983).

[2] Para uma descrição mais detalhada desse regime, bem como de alguns modelos formais, veja Svensson (1997), Walsh (1998), ou as referências lá encontradas.

[3] Ver Svensson (1997) ou Walsh (1998) para mais detalhes sobre as afirmativas desse parágrafo.

[4] Veja o excelente artigo de Rubinstein (1991) sobre teoria dos jogos e como tais modelos devem ser interpretados. Em especial, veja o último parágrafo da introdução.

[5] Em particular, jogos repetidos tendem a levar em conta efeitos de reputação. Tais efeitos são importantes na análise e na compreensão de diversas situações. Veja Myerson (1991), capítulo 7.

2 O modelo

Definir-se-á um superjogo $\mathbf{G}^{\infty}$ com três classes de jogadores indexadas por i[6]. Em cada período, o jogo **G** terá um representante de cada classe. A primeira classe de jogadores (i = 1) será a de governantes, a segunda (i = 2) representará o comando do banco central, denotado pela sigla BC, e a última classe de jogadores (i = 3) representará o eleitor mediano, em termos de idade, que vota nas eleições presidenciais em um determinado período. O estudo restringir-se-á ao uso de ações puras dos jogadores em cada momento. Supõe-se também que os agentes das classes i = 1, 2 podem fazer uso de sinais aleatórios em seus respectivos processos decisórios, o que significa que estratégias correlacionadas são permitidas. De fato, nos equilíbrios que discutiremos, haverá perfeita coordenação entre as ações dos jogadores das classes i = 1, 2 em todos os períodos ao longo da trajetória de equilíbrio.

O critério de equilíbrio a ser utilizado é o de equilíbrio perfeito em subjogos, no qual nenhuma estratégia fracamente dominada é utilizada. Também só serão considerados equilíbrios em que os agentes façam uso de estratégias, nas quais as punições envolvam, no máximo, um desvio da trajetória inicial[7].

Supõe-se perfeita observabilidade de todas as ações e também que todos os jogadores das classes 1 e 2 são racionais. Não se supõe que os eleitores tenham expectativas racionais, muito menos do eleitor mediano, porque, embora eles consigam entender como as ações dos atuais jogadores das classes 1 e 2 afetam sua utilidade, parte da população poderá ser sistematicamente surpreendida por níveis de inflação acima de suas expectativas em um dos equilíbrios propostos; mais que isso, para parte do eleitorado, esse resultado é o mais atrativo. A justificativa aqui é bem simples. Postula-se que a enorme maioria dos eleitores não fez pós-graduação em Ciências Econômicas. Tais eleitores podem achar, por exemplo, que grande parte da culpa da inflação é de banqueiros e empresários ambiciosos e que a responsabilidade do governo e do BC é de gerar aquecimento econômico[8].

A dinâmica de $\mathbf{G}^{\infty}$ será a seguinte: em cada rodada t, o atual jogador 3 escolhe entre manter o atual governo ou eleger a oposição. Formalmente, a ação desse jogador será $s_3^t \in \{gov, op\}$. Em seguida, os atuais jogadores i = 1, 2 escolhem, simultaneamente, entre uma política austera ou frouxa. Observa-se que o BC detém o controle da política monetária, enquanto o governo controla o restante da política econômica, em especial a política fiscal. Formalmente:

$$s_1^t \in \{A, F\},\ s_2^t \in \{a, f\}.$$

Assim, por exemplo, se $s_2^t = a$, então o BC está adotando uma política monetária austera no período t, enquanto que $s_1^t = F$ significa que o governo está adotando uma política frouxa nesse mesmo instante. Após essas escolhas, os *payoffs* do período são realizados e, no período seguinte, nova interação ocorre. Se o eleitor votar na oposição, esta se torna o jogador 1 (novo governo), e o jogo transcorre normalmente.

Supõe-se, por simplicidade, que só existe um bloco de oposição a cada eleição e que, no caso de esse bloco ser eleito, o antigo governante jamais voltará ao poder[9]. O novo governante, por sua vez, enfrentará uma nova oposição no futuro. Por hipótese, os dois partidos não serão intrinsecamente diferentes entre si, de forma que os eleitores estarão indiferentes entre votar em um ou no outro. Isso é feito de modo a evitar considerações a respeito de voto estratégico e outras interações entre políticos e eleitores que estejam fora do escopo deste trabalho[10].

Além disso, supõe-se também que cada eleitor viva por um número finito de períodos K. A cada período, uma fração $1/K$ de indivíduos, precisamente os mais idosos, falece e é substituída por número equivalente de indivíduos jovens, que também viverão por K períodos. De um período para o seguinte, todos os eleitores vivos envelhecem um pouco e, portanto, o eleitor mediano mudará de identidade, mas preservará suas preferências em termos de *trade-offs* intertemporais, pois sua idade sempre se mantém constante. Todos os eleitores têm o mesmo fator de desconto intertemporal, por hipótese[11].

Os *payoffs* dos agentes, no superjogo $\mathbf{G}^{\infty}$, serão dados por:

$$\pi_i = \sum_{t=0}^{+\infty} \delta_i^t u_i^t R_t\ ,\ \forall i \in \{1,2,3\},$$

[6] Informalmente, o jogo repetido $\mathbf{G}^{\infty}$ é a repetição do jogo G infinitas vezes. Nesse caso, diz-se que G é um jogo-estágio de $\mathbf{G}^{\infty}$. Para mais detalhes, ver Fudenberg e Tirole (1991).

[7] Para uma definição formal de estratégias no contexto de jogos repetidos, ver Abreu (1988).

[8] Embora a explicação pareça bastante realista em termos introspectivos, o leitor que ainda não se convenceu deve estudar a literatura de racionalidade limitada. Um bom início é o excelente livro de Rubinstein (1998), no qual aprenderá que erros muito mais grosseiros são freqüentes em experimentos. Atualmente, já existem diversos experimentos de campo mostrando comportamento sistemático de grande parte da população que fere a hipótese de racionalidade perfeita.

[9] Supõe-se que existe apenas um partido de oposição em cada período. Se eleito, o partido do antigo governo se extingue, e um novo partido de oposição ocupa seu lugar. Essa hipótese é suficiente para que o teorema do eleitor mediano se aplique.

[10] Para mais detalhes, ver Gibbard (1973).

[11] Obviamente, essa forte hipótese pode ser substancialmente relaxada às custas de um maior esforço algébrico e de menos clareza.

sendo que $0 < \delta_i < 1$ representa o fator de desconto intertemporal do agente *i*; u_i^t representa a utilidade do agente *i* na rodada *t*; $Rt = r_0 r_1 r_2 \dots r_t$ representa o fator ligado à reputação acumulada até o período *t*, $r_0 = 1$, $r_j \in \{1, \alpha, \beta\}$, $\forall$ j $\in \{1, 2, ..., t\}$, $\forall t \in \{1, 2, ...\}$. Tem-se que $\alpha > 1$ representa o ganho de reputação de um período no qual governo e BC coordenam suas ações em (*A, a*), ou seja, ambos adotam uma política que visa, primordialmente, ao controle inflacionário. Já $0 < \beta < 1$ representa uma perda de reputação em um período no qual o governo e o BC adotam uma política frouxa, ou seja, jogam (*F, f*). Se os jogadores 1 e 2 jogarem (*A, f*) ou (*F, a*), então $r_j = 1$.

Nota-se que os valores numéricos desses ganhos e perdas reputacionais são exógenos e não decorrem das interações estratégicas entre os jogadores. Em outras palavras, os ganhos ou perdas reputacionais melhorariam os fundamentos, ou expectativas acerca da economia. Por exemplo, uma melhor reputação reduz o risco-país, possibilitando ao poder executivo lançar títulos nos mercados interno e externo a taxas de juros mais baixas, o que, por sua vez, geraria menos recessão. Isso é uma maneira simples, embora pouco convencional, de introduzirem-se efeitos de reputação. A idéia é não desviar o foco para modelar risco-país, ou outros setores da economia, de modo a concentrar-se nas interações estratégicas mais relevantes.

Uma vez descritos os efeitos de reputação e as regras do jogo, resta apenas definir os valores u_i^t, para *i* = 1, 2, 3, os quais, como é tradicional em teoria dos jogos, serão funções das ações dos três jogadores na rodada *t*. O Diagrama 1 mostra a estrutura do jogo-estágio ***G***. Para evitar repetição, os demais parâmetros serão apresentados conforme seu uso seja necessário. A próxima seção fará a análise das interações estratégicas no jogo repetido $\boldsymbol{G}^{\infty}$.

3 Equilíbrio e captura do governo e do Banco Central

Inicialmente, serão estudadas as condições sob as quais o eleitor mediano prefere uma política populista, que privilegia o nível de emprego a curto prazo em detrimento da reputação dos atuais jogadores das classes 1 e 2. Em outras palavras, serão analisadas as situações nas quais o terceiro jogador prefere que os dois primeiros coordenem suas ações em (*F, f*). Para isso ocorrer, o eleitor mediano deverá ser suficientemente impaciente, ou seja, δ_3 deverá ser suficientemente pequeno.

Em seguida, as condições sob as quais o atual governo prefere adotar $s_1^t = F$ serão estudadas. Também será verificado quando ele prefere uma política mais austera, mas cede à pressão do eleitor mediano por medo de não se reeleger.

Finalmente, os incentivos do atual BC serão verificados sob diferentes graus de independência. No caso de se ter apenas uma pequena autonomia operacional, poderão existir incentivos para que o BC se comporte em conformidade com o governo e ambos coordenem suas ações adotando políticas populistas. O jogador da classe 1 (atual governo) influenciará o jogador 2 para que ambos coordenem suas políticas em (*F, f*), ou seja, para que adotem uma política de ganhos a curto prazo em detrimento de suas respectivas reputações. Ou seja, o atual governo poderá exercer toda sua influência sobre o BC, por exemplo, substituindo toda a diretoria do BC se necessário for[12]. Nesse caso, diz-se que o BC foi *capturado* pelo governo, que, por sua vez, pode ou não ter sido capturado por uma população impaciente.

Já no caso de total independência, o BC atuará de forma austera e influenciará o governo a ter uma política similar. A intuição por trás desse resultado é que, quando o atual jogador da classe 1 souber que o BC não será capturado, adotará uma política econômica de austeridade. Isso ocorre independentemente de como as intenções de voto para as próximas eleições serão afetadas. Logo, não será possível para o eleitor mediano, por meio da ameaça de votar na oposição, induzir os atuais comandantes do governo e do BC a coordenarem suas ações em uma estratégia frouxa.

[12] Isso será explicado em detalhes na subseção 3.3, na qual se detalharão os incentivos da autoridade monetária.

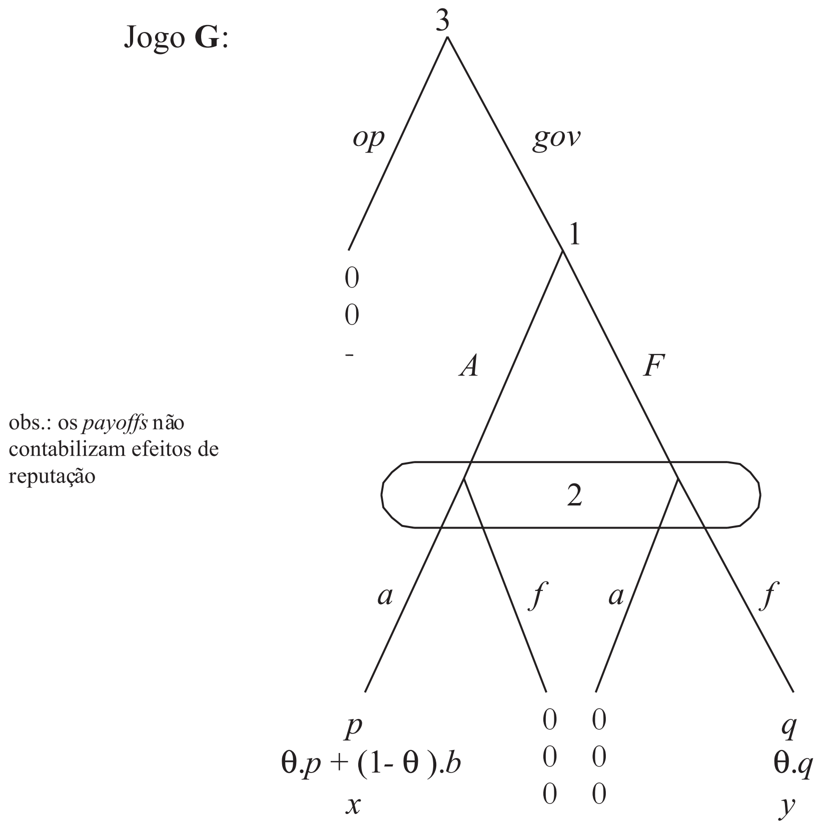

Diagrama 1: Estrutura do jogo *G*

3.1 Preferências do eleitor mediano e eficiência

Existem diversas razões teóricas distintas para acreditar-se que o eleitor mediano não atue de forma a maximizar o bem-estar social. A função a ser otimizada por um planejador social benevolente pode não coincidir com os resultados de eleições conduzidas por voto majoritário[13]. Isso acontece porque, nesse sistema, as preferências do eleitor mediano prevalecem[14]. Se o planejador social maximizar os ganhos médios da população, como é usual, discrepâncias entre a média e a mediana poderão fazer com que a alternativa escolhida pelo voto seja ineficiente. Além disso, o eleitor mediano não leva em consideração a utilidade de gerações futuras, o que também pode acarretar ineficiência da escolha proveniente do resultado do processo eleitoral[15].

Os *payoffs* do eleitor mediano no jogo **G** serão dados por:

$$u_3^t = \begin{cases} x, \text{ se } s_{-3}^t = (A, a) \\ y, \text{ se } s_{-3}^t = (F, f) \\ 0, \text{ se } s_{-3}^t = (F, a) \text{ ou } s_{-3}^t = (A, f) \end{cases}$$

sendo que $x, y > 0$. Ele votará em K eleições ao longo de sua vida. Assim, em um dado período, o eleitor mediano votará nos próximos $k = K/2$ pleitos. Para simplificar a análise, supõe-se uma população com taxa de mortalidade igual à taxa de natalidade e sem fluxos migratórios. Portanto, o eleitor mediano (jogador 3) preferirá a política (F, f) se e somente se:

$$\sum_{t=0}^{k} \delta_3^t x \alpha^t \le \sum_{t=0}^{k} \delta_3^t y \beta^t. \qquad (1)$$

Para a análise da eficiência da decisão do eleitor mediano, comparar-se-á sua escolha com a de um planejador social benevolente que otimiza os ganhos médios de todas as gerações (inclusive as infinitas gerações futuras) e desconta cada período à taxa δ_3,

[13] Vale ressaltar que o planejador social não se refere ao governo, é uma entidade abstrata, construída para que se possa definir qual é a opção eficiente.

[14] Eleitor mediano é aquele com idade mediana no conjunto de todos os eleitores. Para mais detalhes sobre o teorema que assegura a vitória da proposta defendida por tal eleitor em eleições majoritárias, ver Mas-Collel, Whinston e Green (1995), cap. 21, p. 802-803.

[15] Pessoas idosas podem ter parte de sua utilidade vinculada ao bem-estar de seus descendentes. No entanto, se existir um fator de desconto menor do que 1 para payoffs das próximas gerações em adição à taxa de desconto já citada (como é o caso típico de modelos com gerações superpostas), efeitos similares ao que queremos ressaltar persistirão, em termos qualitativos.

a mesma de um eleitor típico. O planejador preferirá a política (F, f) em todos os períodos; isto é, ela será eficiente se e somente se:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \delta_3^t x \alpha^t \leq \sum_{t=0}^{+\infty} \delta_3^t y \beta^t .$$

A condição necessária e suficiente para que o lado esquerdo da desigualdade acima seja uma série convergente é $\delta_3 < \alpha^{-1}$. Supondo-se isso e também $y > x$, o que implica $\alpha.y - \beta.x > 0$, tem-se:

$$\frac{x}{1-\delta_3\alpha} \leq \frac{y}{1-\delta_3\beta} .$$

Manipulando algebricamente os termos da inequação acima, conclui-se que:

$$\delta_3 \leq \delta_c, \qquad (2)$$

em que δ_c, a taxa de desconto crítica do planejador social, é definida como:

$$\delta_c = \frac{y-x}{\alpha.y - \beta.x} .$$

Logo, o planejador preferirá uma política populista (F, f) se e somente se os eleitores forem suficientemente impacientes. Para um eleitor mediano relativamente paciente, a opção por (A, a) é sempre vantajosa, pois, sob as hipóteses técnicas citadas acima, vale $0 < \delta_c < 1$.

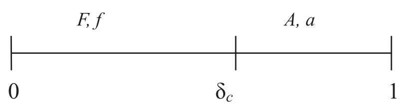

Diagrama 2: Preferência do planejador social

Seja z o *payoff* do terceiro jogador, em **G**, de (F, f) relativo a (A, a), isto é, $z = y/x$. Pode ser observado que o nível crítico $\delta_c = (y - x) / (\alpha.y - \beta.x) = (z - 1) / (\alpha.z - \beta)$ é uma função crescente de z. Isso significa que, quanto mais atrativa for a política populista em um único período, menos impaciente precisa ser o eleitor mediano para que ela seja a alternativa eficiente.

Para taxas de descontos suficientemente grandes ou suficientemente pequenas, não haverá diferença entre as escolhas do eleitor mediano e do planejador social. No entanto, para valores intermediários, o atual eleitor mediano preferirá uma política populista quando o eficiente seria austeridade. Isso ocorre porque ele não leva em conta o bem-estar das gerações futuras e de todos os outros eleitores, enquanto o planejador social considera a utilidade de todos os eleitores e de todas as gerações. De fato, o eleitor mediano prefere uma política populista (F, f) se e somente se:

$$\delta_3 \leq \eta_c, \qquad (3)$$

em que η_c representa sua taxa de desconto crítica que, por definição, resolve a equação:

$$\sum_{t=0}^{k} \eta_c^t x \alpha^t = \sum_{t=0}^{k} \eta_c^t y \beta^t .$$

No Apêndice B (relação A5), será provado que $\eta_c \geq \delta_c$, com a igualdade ocorrendo somente quando $\delta_c = 0$. Será suposto que $\delta_c \leq \delta_3$. Isso significa que a política austera é a mais eficiente. Assim, torna-se evidente o argumento descrito acima que, para certos valores de δ_3, o eleitor mediano escolherá uma política ineficiente que prioriza o nível de emprego de curto prazo em detrimento das gerações futuras, que serão penalizadas pela má reputação dos jogadores 1 e 2. Para tanto, basta que $\delta_c \leq \delta_3 < \eta_c$.

3.2 Estratégias do governo e do eleitor mediano

Uma vez descritas utilidades e possíveis ações dos jogadores em G, pode-se, então, começar o estudo das interações estratégicas entre os agentes. Será analisada a condição sob a qual o atual governo prefere o equilíbrio populista, por ter sido capturado por pressões populares. Estas se farão sentir pelo fato de o eleitor mediano adotar a seguinte estratégia, doravante denotada por s:

1. votar no atual governo se a política observada for (F, f) em toda a história desse governo;
2. votar na oposição no próximo período se houver desvio por parte do atual governo, do BC ou de ambos.

Será demonstrado que o perfil de ações (F, f, s) em todos os períodos faz parte de uma trajetória de equilíbrio perfeito em subjogos de G^{∞}, em que nenhum jogador utiliza de estratégias fracamente dominadas, desde que o eleitor mediano seja relativamente impaciente, o governo e o BC sejam relativamente pacientes e o BC goze de pouca autonomia. Também será demonstrado que a mesma trajetória de equilíbrio não pode ser observada em um equilíbrio perfeito em subjogos de G^{∞}, em que nenhum jogador utiliza estratégias fracamente dominadas, no caso de independência total do BC.

Considere os *payoffs* do governo no jogo **G** como sendo dados por:

$$u_1^t = \begin{cases} p, \text{ se } s_{-3}^t = (A,a) \\ q, \text{ se } s_{-3}^t = (F,f) \\ 0, \text{ se } s_{-3}^t = (F,a) \text{ ou } s_{-3}^t = (A,f) \end{cases}$$

em que $p > q > 0$.

Proposição 1

Suponha que o eleitor mediano prefira o equilíbrio populista. Então, o atual governo também preferirá esse equilíbrio se e somente se ele for suficientemente paciente, i.e.:

$$\beta\delta_1 \geq 1 - \frac{q}{p} \tag{4}$$

Demonstração

Se o atual governo adotar a política frouxa, sempre será reeleito, ganhando $q\beta^t$ na rodada situada t períodos à frente. Caso jogue a política austera, ganhará p agora e perderá a próxima eleição. Manipulando algebricamente a expressão $\sum_{t=0}^{+\infty} \delta_1^t . q . \beta^t \geq p$, pode-se ver que ela ocorre se e somente se $\beta.\delta_1 \geq 1 - q/p$.

q.e.d

Nota-se que $q < p$ implica que o poder executivo deseja adotar, em conjunto com o BC, uma política (*A, a*) mesmo a curto prazo (jogo ***G***). A longo prazo (jogo G^{∞}), o atual governo leva em consideração sua taxa de desconto intertemporal δ_1, a parte β do efeito de reputação (que piora futuros *payoffs* de todos os agentes no caso de uma política frouxa ser adotada) e a razão q / p entre seus *payoffs* a curto prazo.

A inequação (4) mostra que quanto mais paciente é o governo (quanto maior for δ_1) mais facilmente ele será capturado pelas pressões populares. Isso ocorre porque quanto maior for δ_1, maior é o valor que ele atribui à sua reeleição e, portanto, mais custosa se torna a ameaça de perder a próxima eleição.

Se o efeito negativo da reputação aumenta (isto é, se β diminui), então o governo deve ser mais paciente para que a inequação (4) seja satisfeita. De fato, se o governo reconhece uma grande piora na situação econômica no caso de implementar-se uma política populista, então ele terá menos incentivos a agir dessa forma.

Seja $\delta_{1c} = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{q}{p}\right)$. O Diagrama 3 considera o efeito sobre o valor crítico δ_{1c} de uma variação em β.

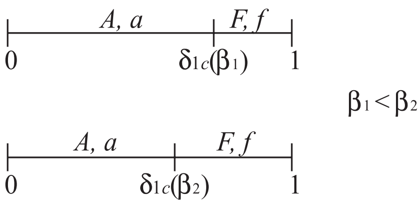

Diagrama 3: Efeito da variação de β

Finalmente, a decisão dependerá também da razão dos *payoffs* no jogo ***G***, isto é, de q/p. Quanto menor for essa razão mais paciente (maior desejo de obter a reeleição) deve ser o governo para que ele adote uma política populista. A explicação para esse resultado é simples: quanto menores forem os *payoffs* auferidos por adotar-se uma política populista (q/p relativamente menor) em um período menos propenso a isso o governo estará (a região correspondente a (*F, f*) decresce quando q/p decresce), conforme o diagrama 4.

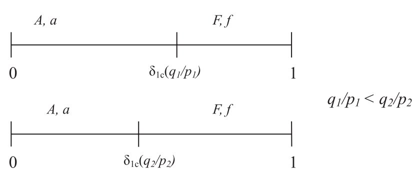

Diagrama 4: Efeito da variação de q / p

3.3 Incentivos do Banco Central

A análise a seguir considerará diversos tipos de relação entre o BC e o governo. Essa análise será formalizada a partir de uma parametrização do grau de relação entre os *payoffs* no jogo ***G*** de ambos. Seja $0 \leq \theta \leq 1$ um número real, chamado de **grau de dependência do BC**.

Esse parâmetro fornece uma medida de correlação entre os *payoffs* dos atuais jogadores 1 e 2. Se $\theta = 0$, então tem-se um BC totalmente independente. No outro extremo, tem-se $\theta = 1$. Nesse caso, diz-se que o BC foi completamente capturado pelo atual governo. Para casos intermediários, tem-se a noção de autonomia operacional. As definições abaixo refletem as idéias descritas acima.

Definição 1 (independência do BC)

Um banco central é dito independente se, no jogo-estágio G, seus *payoffs* e os do governo forem completamente independentes, isto é, se $\theta = 0$. Nesse caso, a diretoria do BC nunca poderá ser trocada pelo atual governo.

Definição 2 (autonomia operacional)

Um banco central é dito regido por autonomia operacional se, no jogo-estágio G, seus *payoffs* e os do governo forem dependentes, isto é, se $0 < \theta < 1$. Nesse caso, sua diretoria será trocada toda vez que o atual governo for derrotado nas eleições. O grau de autonomia do BC é definido por $1 - \theta$.

Definição 3 (BC totalmente capturado pelo governo)

Um banco central é dito totalmente capturado pelo atual governo se, no jogo-estágio G, seus *payoffs* e os do governo forem idênticos, isto é, se $\theta = 1$. Nesse caso, sua diretoria será trocada toda vez que o atual governo for derrotado nas eleições.

Os *payoffs* do BC no jogo G são dados por:

$$u_2^t = \begin{cases} \theta.p + (1-\theta).b, \text{ se } s_{-3}^t = (A,a) \\ \theta.q, \text{ se } s_{-3}^t = (F,f) \\ 0, \text{ se } s_{-3}^t = (F,a) \text{ ou } s_{-3}^t = (A,f) \end{cases}$$

sendo que:

$$b > 0. \quad (5)$$

Deve ser observado que, caso $\theta = 1$ (BC totalmente capturado), a equação acima mostra um BC com *payoffs* exatamente iguais aos do governo. Por outro lado, se $\theta = 0$ (BC independente), então os ganhos do jogador 1 não possuem relação alguma com os do jogador 2. Neste caso, tem-se:

$$u_2^t = \begin{cases} b, \text{ se } s_{-3}^t = (A,a) \\ 0, \text{ se } s_{-3}^t = (F,a),\ s_{-3}^t = (F,f), \text{ ou } s_{-3}^t = (A,f) \end{cases}$$

A hipótese de o grau de dependência ser dado pelo parâmetro θ pode ser justificada por interações estratégicas exógenas ao modelo entre o governo e o BC. Considera-se que o poder do primeiro em influenciar o último estará implicitamente representado pelo parâmetro do grau de autonomia[16]. O valor de θ resumirá o resultado de todas essas interações. Dependendo dos arranjos institucionais, a substituição da diretoria de bancos centrais pode ser mais ou menos custosa. Se essa substituição for muito onerosa, será difícil para o governo impor suas idéias acerca da condução da política monetária por meio da ameaça de demissão.

O resultado a seguir mostra em que condições o BC cederá às pressões do governo e aceitará coordenar com ele uma política de efeitos positivos apenas a curto prazo. Observa-se que, por hipótese, a diretoria do banco central perde o mandato quando discorda do governo, no caso de não haver independência ($\theta > 0$).

Proposição 2

Suponha que o BC não é independente, ou seja, $\theta > 0$. Então o BC sempre preferirá coordenar políticas em (F, f) se e somente se:

$$\beta\delta_2 \geq 1 - \frac{q}{p + \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)b}. \quad (6)$$

Demonstração

O BC preferirá a política f se e somente se:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \delta_2^t \beta^t (\theta.q) \geq \theta.p + (1-\theta).b \; .$$

O lado esquerdo da expressão acima mostra o fluxo infinito de utilidades do BC caso ceda às pressões do governo. O lado direito reflete sua utilidade em um período no qual consiga influenciar o atual governo a coordenar em uma política austera. Como o governo perderá a próxima eleição, a diretoria do BC perderá seu cargo. Manipulando-se algebricamente a inequação acima, obtém-se a relação (6). q.e.d.

Pode ser observado que, quando $\theta = 1$ e $\delta_2 = \delta_1$, a inequação (6) fica idêntica à (4). Isso era de se esperar, pois, nesse caso, os *payoffs* dos jogadores 1 e 2 coincidem. Já no caso limite de $\theta = 0$, isto é, quando o BC é independente, a inequação (6) se transforma em $\beta\delta_2 \geq 1$. Entretanto, isso nunca pode ocorrer, pois $\beta < 1$ e $\delta_2 < 1$. De fato, pode-se resolver (6) para o parâmetro θ e obter-se:

$$\theta \geq \frac{b}{\frac{q}{1-\beta\delta_2} + b - p}, \quad (6')$$

[16] Este ponto não será formalizado neste artigo.

que mostra um valor mínimo de correlação entre o BC e o governo para que seja possível capturar o BC.

A equação (6') reflete o fato de que, se o BC for suficientemente dependente do governo (θ pequeno), ele está capturado e preferirá a política populista à austera. Finalmente, observa-se que, devido às hipóteses (4) e (5), o denominador de (6') é estritamente positivo quando $\delta_1 = \delta_2$[17]. Mais que isso: se a desigualdade (4) for estrita, então a expressão à direita de (6') é estritamente menor que um. Nesse caso, sempre existirão valores para o parâmetro θ que fazem com que (6') seja válida.

3.4 Equilíbrio com captura do Banco Central

Completando a análise das estratégias e preferências dos agentes que compõem a economia, pode-se enunciar, então, o principal resultado deste artigo. Aí, completar-se-á o argumento de que o perfil de ações (*F, f, s*) em todos os períodos faz parte de uma trajetória de equilíbrio perfeito em subjogos de G^∞ se o eleitor mediano for suficientemente impaciente, se o BC e o governo forem suficientemente pacientes e se o BC não tiver total independência. Além disso, nesse equilíbrio, nenhum agente utiliza estratégias fracamente dominadas.

Proposição 3

Se o BC não for independente, isto é, se $\theta > 0$ e as relações (3), (4), (5) e (6) forem satisfeitas, então existirá um equilíbrio perfeito em subjogos de G^∞, em que nenhum agente se utiliza de estratégias fracamente dominadas, e o perfil de ações (*F, f, s*) é jogado em todas as rodadas ao longo da trajetória de equilíbrio.

Demonstração

Desvios unilaterais dos jogadores 1 e 2 dão, ao respectivo desviante, zero de pagamento, sendo, portanto, não lucrativos. Como é permitido aos jogadores 1 e 2 adotar ações correlacionadas, precisa-se verificar se há incentivos para que suas políticas sejam coordenadas em (*A, a*). Para o governo, como a equação (4) é satisfeita, não é vantajoso coordenar com o BC em (*A, a*). Para este último, como $\theta > 0$ e a equação (6) é satisfeita, coordenar com o governo em (*A, a*) não será compensador. Para o eleitor mediano, como a equação (3) é satisfeita, sua política preferida (*F, f*) é implementada e, portanto, não há incentivos para desvios unilaterais. Segue-se que o perfil (*F, f, s*) em todas as rodadas faz parte da trajetória de equilíbrio de um equilíbrio perfeito em subjogos de G^∞.

q.e.d.

Corolário 1

Se o BC for totalmente capturado pelo governo, isto é, se $\theta = 1$, e se as relações (3), (4) e (5) forem satisfeitas, então existe um equilíbrio perfeito em subjogos de G^∞, em que nenhum agente se utiliza de estratégias fracamente dominadas, e o perfil de ações (*F, f, s*) é jogado em todas as rodadas ao longo da trajetória de equilíbrio.

A proposição acima e seu corolário mostram que, se o BC não for completamente independente, então existem valores para os parâmetros δ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, que fazem com que uma política monetária frouxa seja implementada mesmo quando ela é ineficiente. Para implementar tal política, o eleitor mediano utiliza a ameaça de votar na oposição nas próximas eleições. Para um BC suficientemente dependente e jogadores 1 e 2 suficientemente pacientes, a ameaça de serem alijados do poder faz com que cedam às pressões e coordenem em uma política econômica frouxa. Se $\delta_c \leq \delta_3$, esse equilíbrio é ineficiente, prejudicando as gerações futuras para beneficiar um eleitor mediano impaciente.

Resta, agora, mostrar que tal perfil de estratégias não pode ser implementado como equilíbrio perfeito em subjogos sem uso de estratégias fracamente dominadas em uma sociedade na qual o BC goza de total independência. Essa conjectura é demonstrada na proposição abaixo.

Proposição 4

Se o BC for independente, isto é, se $\theta = 0$, então, em todo equilíbrio perfeito em subjogos em que nenhum agente utilize estratégias fracamente dominadas, o governo e o BC coordenarão suas políticas em (*A, a*) em todas as rodadas ao longo da trajetória de equilíbrio.

Demonstração

Se $\theta = 0$, a estratégia *f* é fracamente dominada para o BC em G. Também, como

[17] Essa é uma outra hipótese simplificadora e também poderia ser substancialmente relaxada às custas de um maior esforço algébrico e de menor clareza.

sua diretoria não pode ser trocada, tem-se que qualquer estratégia de G^{∞} em que se atribui probabilidade positiva à política *f* em qualquer período será dominada (fraca ou estritamente) pela estratégia de adotar a política *a* em todos os períodos, independentemente das ações presentes ou futuras dos jogadores 1 e 3. Portanto, somente equilíbrios em que o BC adota a política *a* não envolvem estratégias dominadas. Isso posto, a melhor resposta do governo é adotar a política *A*, independentemente do voto do eleitor mediano. Este, por sua vez, estará indiferente entre votar no atual governo ou na oposição. Portanto, qualquer que seja seu voto, o perfil de estratégias (*A, a, -*) em todas as rodadas ao longo da trajetória de equilíbrio será parte de um equilíbrio perfeito em subjogos em que nenhum agente utiliza estratégias fracamente dominadas. Observe que, no equilíbrio proposto, todos os desvios da trajetória de equilíbrio são ignorados (não são punidos).

q.e.d.

A proposição acima diz que, quando o BC é independente, não é razoável esperar que uma política frouxa seja adotada. Isso significa que o eleitor mediano perde seu poder de pressão junto aos demais jogadores. Se $\delta_c \leq \delta_3 \leq \eta_c$, isso significa que a política eficiente será adotada, e não haverá prejuízo para as gerações futuras. Em outras palavras, se a taxa de desconto do eleitor mediano for suficientemente pequena para que ele prefira a política de ganhos a curto prazo, enquanto que o eficiente seria a austeridade, então a independência total do BC garantirá eficiência em equilíbrio.

Nota-se que bancos centrais totalmente independentes sempre asseguram a implementação de políticas austeras para quaisquer valores dos parâmetros. No entanto, dados os valores dos parâmetros *x, y, p, q, b,* α, β, *e* δ, um elevado grau de autonomia (θ pequeno) pode ser suficiente para que a política austera seja implementada. Para tanto, basta que θ viole a desigualdade (6'). Em outros termos, se o BC for suficientemente autônomo, não haverá equilíbrio em que o eleitor mediano utilize o voto para assegurar a implementação de (*F, f*) em todas as rodadas ao longo da trajetória de equilíbrio[18].

4 Conclusão

Os danos causados por um governo que não prioriza o controle das contas públicas e por um BC que não mantém taxas relativamente baixas de inflação podem estender-se por muitos anos, por meio da perda de confiança dos investidores, traduzindo-se em uma maior taxa de juros e um maior desemprego a longo prazo[19].

Neste artigo, consideramos um modelo, segundo o qual, sob regime de autonomia operacional, o BC pode ser capturado por um eleitor mediano impaciente. Para tanto, o BC deve ser suficientemente dependente do governo, que, por sua vez, deve valorizar muito sua própria reeleição. Esse equilíbrio pode levar à adoção de políticas ineficientes que visam apenas ao bem-estar a curto prazo em detrimento do bem-estar das gerações futuras. Nesse contexto, o sistema que garante a independência do BC seria mais eficiente, pois limitaria o poder do eleitor mediano no sentido de pressionar por um aquecimento econômico efêmero.

Embora o presente artigo só explique uma das desvantagens de se ter um BC com comprometimento político, certamente existem outras. Sendo um vital órgão de Estado e de natureza extremamente técnica, seu "aparelhamento" é fonte de muitas fricções internas. Pode haver a substituição dos valores institucionais, como competência, fidelidade aos interesses do país e mérito por subserviência, fidelidade pessoal ou partidária e culto a personalidades, o que não ajuda no desenvolvimento de qualquer país. Esse, no entanto, é um assunto para pesquisas futuras.

Referências Bibliográficas

ABREU, Dilip. On the theory of infinitely repeated games with discounting. **Econometrica**, 56(2), p. 383-396 mar, 1988.

ALESINA, Alberto; SUMMERS, Lawrence H. Central bank independence and macroeconomic performance: some comparative evidence. **Journal of Money, Credit and Banking**, n. 25, may, 1993.

AUMANN, Robert J. Subjectivity and correlation in randomized strategies. **Journal of Mathematical Economics**, p. 67-96, 1974.

[18] Existem outros perfis de estratégias que são equilíbrio. Em particular, o perfil (*F, f ,gov*) pode ser implementado.

[19] Ver Svensson (1997).

BARRO, R. J.; GORDON, D. B. Rules, discretion, and reputation in a model of monetary policy. **Journal of Monetary Economics**, n. 12, p. 101-121, 1983.

CUKIERMAN, Alex. **Central bank strategy, credibility, and independence: theory and evidence**. Cambridge, Massachusetts; London, England: The MIT Press, 1992.

FRIEDMAN, Milton. Should there be an independent monetary authority? **Dollar and Deficits: Inflation, Monetary Policy and the Balance of Payments**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1968.

FUDENBERG, Drew; TIROLE, Jean. **Game theory**. Cambridge, Massachussets: The MIT Press, 1991.

GIBBARD, Allan. Manipulation of voting schemes: a general result. **Econometrica**, n. 4, p. 587-601, july 1973.

MAILATH, George J.; SAMUELSON, Larry. **Repeated Games and Reputations: Long-Run Relationships**. Oxford University Press, 2006.

MAS-COLELL, Andreu; WHINSTON, George W.; GREEN, Jerry R. **Microeconomic analysis**. New York: Oxford University Press, 1995.

MYERSON, Roger. **Game theory**. Harvard University Press, 1991.

RUBINSTEIN, Ariel. on the Interpretation of Game Theory. **Econometrica**, n. 4, p. 909-924, july 1991.

RUBINSTEIN, Ariel. **Modeling bounded rationality**. The MIT Press, 1998.

SVENSSON, Lars E. O. Optimal inflation targets, “conservative” central banks, and linear inflation contracts. **The American Economic Review**, n. 1, p. 98-114, mar. de 1997.

__________. Inflation targeting as a monetary police rule. **NBER Working Paper**.

WALSH, Carl E. **Monetary theory and policy**. The MIT Press, 1998.

Apêndice A: Ineficiência da opção preferida pelo eleitor mediano

Nota-se que o eleitor mediano pode escolher uma política ineficiente mesmo que não haja conflito entre os eleitores vivos e as gerações ainda não nascidas. Para ilustrar esse ponto, supõe-se que cada agente viva por exatamente três períodos, e que a população não apresente crescimento[20]. Supõe-se que existam três pessoas na população: um jovem que viverá por três períodos, um adulto que viverá nos próximos dois períodos e um cidadão sênior que viverá apenas por mais um. Todos os agentes descontam seus *payoffs* futuros à taxa δ.

O impacto das políticas adotadas pelo governo e pelo BC será sentido pelas três pessoas com pesos diferentes. O jovem será mais impactado por essas decisões do que os demais agentes, pois ele ainda tem três períodos para realizar seus ganhos. Já as demais pessoas têm, respectivamente, apenas dois e um períodos de vida e, portanto, realizarão uma parte menor de seus *payoffs* no futuro. Logo, é natural que haja um conflito de interesses entre tais cidadãos: os jovens aceitarão melhores políticas que trazem sacrifícios a curto prazo (período atual) em troca de benefícios a longo prazo (próximos dois períodos). Já pessoas mais idosas não irão usufruir tais políticas e tenderão a priorizar o curto prazo[21].

A título de exemplo, supõe-se que existam duas possíveis políticas que o BC pode adotar: uma política frouxa *f*, que trará benefícios marginais de 1, 1 e 0 a todos os membros da população nos próximos três períodos respectivamente; e uma política austera *a*, que trará benefícios marginais de 0, 1 e 9, respectivamente. Os cidadãos adultos e seniores preferirão a política *f*, com certeza, enquanto o jovem preferirá *a*, se for suficientemente paciente. Logo, o eleitor mediano (o adulto) escolherá a política *f*. Entretanto, essa opção pode não estar maximizando o bem-estar social dado pela soma *S* dos benefícios marginais dessa medida nas utilidades das três pessoas. Assim, tem-se que:

$$S(f) = (1 + \delta) + (1 + \delta) + 1 = 3 + 2\delta$$

se a política *f* for adotada, enquanto que, no caso de implementação da política *a*, tem-se:

$$S(a) = (\delta + 9\delta^2) + \delta + 0 = 9\delta^2 + 2\delta$$

Portanto, $S(f) < S(a)$ se e somente se $3 + 2\delta < 9\delta^2 + 2\delta$, e isso ocorrerá se a população for suficientemente paciente, isto é, se $\delta > \sqrt{3}/3 \cong 0{,}57$. Pode ser observado que a existência de gerações futuras, que teriam sua utilidade afetada pela decisão atual de política econômica, reforçaria substancialmente esse

[20] É imediato ver que esse argumento pode ser generalizado.

[21] Ou, pelo menos, os cidadãos seniores não usufruem os benefícios dessa política tanto quanto os jovens. Pessoas idosas podem, no entanto, ter parte de sua utilidade vinculada ao bem-estar de gerações futuras, em especial de seus filhos e netos. No entanto, se existir um fator de desconto substancialmente menor que 1 para *payoffs* das próximas gerações em adição à taxa de desconto já citada, os efeitos do exemplo citado irão persistirão.

argumento. De qualquer forma, conclui-se que, mesmo sem considerar tais gerações, o interesse do eleitor mediano pode não maximizar o bem-estar social.

Em resumo, é falsa a idéia de que, em um sistema de voto majoritário, o resultado das eleições revela completamente todos os desejos e aspirações da população. Parte da população – nesse caso, os jovens – não tem suas preferências representadas de forma eficiente em eleições nas quais esse sistema eleitoral é adotado. Isso ocorre porque o eleitor mediano irá impor suas preferências sobre o resto da população, desconsiderando completamente os interesses das minorias.

Apêndice B: Relação entre as taxas de desconto

O objetivo deste apêndice é relacionar as taxas de desconto críticas δ_c e η_c, respectivamente, quando um agente utiliza um modelo com infinitos períodos e um modelo com finitos períodos.

Para um fluxo infinito de utilidades, tem-se:

$$\text{(A1)}\quad \sum_{t=0}^{+\infty} \delta_c^t x \alpha^t = \sum_{t=0}^{+\infty} \delta_c^t y \beta^t$$

$$\text{(A1')}\quad \delta_c = \frac{y-x}{\alpha y - \beta x} = \frac{z-1}{\alpha z - \beta}$$

Para um fluxo finito, tem-se:

$$\text{(A2)}\quad \sum_{t=0}^{k} \eta_c^t x \alpha^t = \sum_{t=0}^{k} \eta_c^t y \beta^t$$

De (A1'), obtém-se:

$$\text{(A1'')}\quad z = \frac{1-\beta\delta_c}{1-\alpha\delta_c}$$

De (A2):

$$\text{(A3)}\quad \frac{1-(\alpha\eta_c)^{k+1}}{1-\alpha\eta_c} = z\left(\frac{1-(\beta\eta_c)^{k+1}}{1-\beta\eta_c}\right)$$

Substituindo-se (A1'') em (A3), obtém-se:

$$\text{(A4)}\quad \frac{1-(\alpha\eta_c)^{k+1}}{1-\alpha\eta_c} = \left(\frac{1-\beta\delta_c}{1-\alpha\delta_c}\right)\left(\frac{1-(\beta\eta_c)^{k+1}}{1-\beta\eta_c}\right)$$

Sejam as funções $S_\alpha : [0,1] \rightarrow \Re$ e $S_\beta : [0,1] \rightarrow \Re$, dadas pelas fórmulas:

$$S_\alpha(\eta_c) = \sum_{t=0}^{k} (\alpha\eta_c)^t = \frac{1-(\alpha\eta_c)^{k+1}}{1-(\alpha\eta_c)},$$

$$S_\beta(\eta_c) = \sum_{t=0}^{k} (\beta\eta_c)^t = \frac{1-(\beta\eta_c)^{k+1}}{1-(\beta\eta_c)}.$$

Manipulando-se algebricamente (A4), obtém-se:

$$\text{(A4')}\quad \delta_c = h(\eta_c) = \frac{S_\alpha(\eta_c) - S_\beta(\eta_c)}{\alpha.S_\alpha(\eta_c) - \beta.S_\beta(\eta_c)}$$

O diagrama A abaixo mostra o comportamento da função h : [0, 1] $\rightarrow \Re$.

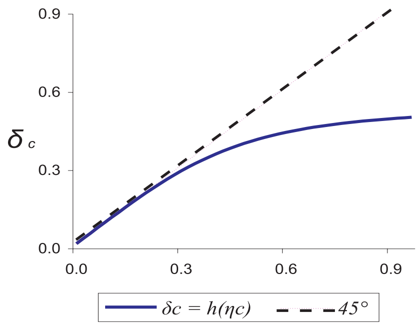

Diagrama A: Gráfico da função h

Proposição: $\forall \eta_c \in (0,1]$, valem as seguintes propriedades:

(A5) $0 < \delta_c = h(\eta_c) < \eta_c$

$$\text{(A6)}\quad \frac{\partial\delta_c}{\partial\eta_c} = \frac{(\alpha-\beta)\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial\eta_c} S_\beta - S_\alpha \frac{\partial S_\beta}{\partial\eta_c}\right)}{\left(\alpha.S_\alpha - \beta.S_\beta\right)^2}$$

(A7) $h'(\eta_c) > 0$

$$\text{(A8)}\quad 0 < \lim_{\eta_c \to 1}\left(h(\eta_c)\right) = \frac{(1-\beta)(1-\alpha^{k+1}) - (1-\alpha)(1-\beta^{k+1})}{\alpha.(1-\beta)(1-\alpha^{k+1}) - \beta.(1-\alpha)(1-\beta^{k+1})} < 1$$

Demonstração de (A5): Como $\alpha > \beta$, então:

$$(\beta\eta_c)^{k+1} < (\alpha\eta_c)^{k+1} \Rightarrow 1-(\alpha\eta_c)^{k+1} < 1-(\beta\eta_c)^{k+1}$$

$$\Rightarrow (1-\alpha\eta_c)\sum_{t=0}^{k}(\alpha\eta_c)^t < (1-\beta\eta_c)\sum_{t=0}^{k}(\beta\eta_c)^t$$

Logo, vale:

$$\sum_{t=0}^{k}(\alpha\eta_c)^t - \sum_{t=0}^{k}(\beta\eta_c)^t < \alpha\eta_c\sum_{t=0}^{k}(\alpha\eta_c)^t - \beta\eta_c\sum_{t=0}^{k}(\beta\eta_c)^t$$

Mas esta última relação é, claramente, equivalente a (A5), o que conclui esta demonstração. Já as demonstrações de (A6) e (A8) são imediatas, a partir de (A4'). Resta provar (A7), ou seja, que a função h é estritamente crescente e, portanto, possui inversa.

Demonstração de (A7): Observando-se (A6), pode-se ver que (A7) equivale à desigualdade (A9) abaixo:

(A9) $$\frac{\partial S_\alpha}{\partial \eta_c} S_\beta - S_\alpha \frac{\partial S_\beta}{\partial \eta_c} > 0,$$

ou seja:

(A9') $$\frac{S_\alpha}{S_\beta} < \frac{\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \eta_c}\right)}{\left(\frac{\partial S_\beta}{\partial \eta_c}\right)},$$

ou ainda:

(A9") $$\frac{\sum_{t=0}^{k-1} (\alpha\eta_c)^t}{\sum_{t=0}^{k-1} (\beta\eta_c)^t} < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\sum_{t=0}^{k-1}\left[(t+1).(\alpha\eta_c)^t\right]}{\sum_{t=0}^{k-1}\left[(t+1).(\beta\eta_c)^t\right]}\right),$$

que pode ser provado por indução em k. Para k = 1 e k = 2, a relação (A9") pode ser facilmente verificada. De fato, no caso de k > 1 vale esta relação, mesmo que se omita o fator $\frac{\alpha}{\beta}$.

Sejam $a = \alpha\eta_c$ e $c = \beta\eta_c$. Como $\alpha > \beta$, então $a > c$. Supõe-se (hipótese de indução) que a seguinte inequação vale para um certo valor de k.

(A10) $$\frac{\sum_{t=0}^{k-1} a^t}{\sum_{t=0}^{k-1} c^t} < \frac{\sum_{t=0}^{k-1}\left[(t+1).a^t\right]}{\sum_{t=0}^{k-1}\left[(t+1).c^t\right]}$$

O passo crítico para completar a demonstração para $k + 1$ envolve mostrar que:

(A11) $$\sum_{t=0}^{k-1}\left((k+1)a^t c^k + (t+1)a^k c^t\right) < \sum_{t=0}^{k-1}\left((t+1)a^t c^k + (k+1)a^k c^t\right)$$

Mas a desigualdade (A11) é equivalente a:

(A11') $$\sum_{t=0}^{k-1}(k-t)(a^t c^k - a^k c^t) < 0$$

Agora, é fácil verificar que todas as parcelas dessa expressão são estritamente negativas quando $k > 1$, pois sempre $t < k$ e $a > c > 0$. Isso conclui a demonstração de (A7).

q.e.d.