



UM MODELO DE TORNEIO COM INVESTIMENTO EM CAPITAL HUMANO*

Odilon Arruda Câmara¹
Francisco Galvão Carneiro²

Resumo - O modelo de torneio original estuda como as empresas podem utilizar uma estrutura de competição por prêmios que incentive o aumento do esforço dos funcionários (Lazear e Rosen, 1981). Neste artigo, apresentamos uma nova estratégia de modelagem de torneios através da inclusão da possibilidade do indivíduo poder investir em capital humano. Tal procedimento permite que se verifiquem os incentivos resultantes e os efeitos do investimento em capital humano durante a competição sobre a produtividade e o esforço dos competidores.

Palavras-chave: modelo de torneio, capital humano, competição, prêmio, estrutura salarial, contrato.

Abstract - This paper shows the effects of the introduction of human capital accumulation in the tournament model. The original model studies how companies may use a structure of competition for prizes to incentive increases in the employees' effort. The proposed model discusses the introduction of the possibility of individuals investing in their human capital, verifying the resulting incentives and effects over competitors' productivity and effort.

Key-words: tournament model, human capital, contest, prizes, wage structure, contract.

Classificação JEL: J41.

* Os autores agradecem aos comentários e sugestões de Eduardo Pontual Ribeiro, Jaime Orrillo e Adolfo Sachsida a versões anteriores deste artigo. Os erros remanescentes, no entanto, são de nossa inteira responsabilidade.

¹ Mestre em Economia de Empresas pela Universidade Católica de Brasília.

² Professor Titular - Mestrado em Economia de Empresas da Universidade Católica de Brasília.



INTRODUÇÃO

Uma das grandes preocupações das firmas no processo de contratação de seus trabalhadores está na correta identificação da produtividade dos candidatos a um posto de trabalho e, uma vez que já efetuada a contratação desses trabalhadores, em como se avaliar e recompensar o seu desempenho dentro da firma. Da mesma forma, o trabalhador se vê diante de um dilema entre sinalizar corretamente sua produtividade potencial no período de seleção ou esconder algumas de suas deficiências diante do empregador para aumentar suas chances iniciais de contratação. Nesse processo, além de observarmos a existência de informação assimétrica durante o período de seleção e recrutamento de trabalhadores por parte da firma, nota-se a existência de incertezas por parte do trabalhador sobre o montante de esforço que o mesmo deve despendar, uma vez que já esteja contratado, já que a forma pela qual a firma reage à produtividade dos trabalhadores pode acabar por ser prejudicial aos mais produtivos. Um exemplo disso seria o conhecido efeito *ratchet*, onde a produtividade elevada num período inicial acaba por elevar os padrões de cobrança por parte da firma/empregador para o período seguinte (Lazear, 1999).

O modelo padrão com o maior número de aplicações práticas a respeito desse processo de identificação e recompensa da produtividade dos trabalhadores é o chamado modelo de torneio (Lazear, 1998). Como trata-se de uma área relativamente nova, não há muita evidência específica disponível sobre a importância da teoria dos torneios. O artigo de Lazear e Rosen (1981) é tido como a primeira apresentação e análise formal da utilização de torneios como forma de contrato de trabalho eficiente. Seguindo a linha de trabalho desses autores, surgiram outros estudos que tentaram aperfeiçoar e estender o modelo, como Green e Stokey (1983), Nalebuff e Stiglitz (1983) e Rosen (1986), e ainda trabalhos que analisaram variações do modelo, como Clark e Riis (1998) e Moldovanu e Sela (2001). Algumas pesquisas encontraram evidências empíricas que corroboram a existência de estruturas salariais baseadas em torneios, como Bognanno (2001).

Em todos esses trabalhos, os competidores são tidos como homogêneos ou como heterogêneos. Os competidores heterogêneos possuem habilidades pré-determinadas (exógenas e fixas), seguindo uma certa distribuição na população. Essa habilidade aumenta a produtividade do indivíduo ou diminui seu custo de esforço. Rosen (1986) mostrou que os indivíduos mais habilidosos são os que se esforçam mais no torneio e são os que possuem a maior chance de vencê-lo. Portanto, quanto maior a habilidade do indivíduo melhor para a firma, que recebe um maior retorno na forma de esforço, e melhor para o próprio competidor, que aumenta o valor esperado de seu prêmio.

Todavia, se considerarmos a teoria do capital humano conforme apresentada por Becker (1962), a habilidade que o indivíduo possui para produzir é uma função de seu estoque de capital humano acumulado. Ainda, este estoque não é exógeno nem imutável, mas sim determinado pelo investimento feito no capital humano do indivíduo. Sendo assim, haveria interesse do indivíduo em investir no seu capital humano para aumentar sua habilidade e, conseqüentemente, aumentar suas chances de vencer o torneio, considerando os custos e benefícios esperados de tal investimento.



Portanto, estudar como os torneios afetam o investimento dos funcionários em capital humano e determinar qual a forma mais eficiente de se incentivar tal investimento é de fundamental importância para a teoria econômica. Uma correta compreensão dos aspectos envolvidos nesse processo é importante para a firma, que irá maximizar seus lucros, e para o empregado, que poderá aumentar a sua qualificação e renda esperada. Conhecendo melhor esses efeitos, as firmas podem, então, montar competições que incentivem o investimento de forma mais eficiente, resultando em uma mão-de-obra devidamente qualificada e com um nível ótimo de produtividade.

Neste artigo, propomos uma nova estratégia de modelagem através da introdução da variável capital humano no modelo de torneio. Com isso, mostramos que cada competidor no torneio passará a escolher entre o esforço e o investimento em capital humano de forma eficiente, observando os custos marginais e os benefícios marginais da substituição entre os dois insumos do trabalho. Os empregados se comportam como firmas que escolhem entre produzir e investir. Quanto maior o retorno esperado, maior será o investimento e o esforço. A firma irá preferir contratar o funcionário com a função de investimento mais barata. Ou seja, a firma preferirá o trabalhador que aprende e se adapta mais facilmente, podendo assim investir em sua formação com menores custos e se tornar mais produtivo.

O artigo está organizado da seguinte forma. Após esta Introdução, a segunda seção apresenta a forma mais simples do modelo de torneio que propomos, com apenas um estágio e competidores homogêneos. Na terceira seção, introduzimos competidores heterogêneos. Finalmente, na quarta seção, discutimos as conclusões do trabalho. De uma forma geral, pode-se dizer que, no modelo de Rosen (1986), analisa-se a resposta de esforço do jogador, dada a habilidade (capital humano) constante dos jogadores. No modelo aqui apresentado, analisamos as variações tanto do esforço quanto do capital humano. Portanto, a habilidade relativa dos competidores – seu capital humano – depende das escolhas dos próprios jogadores.

2. MODELO COM 1 ESTÁGIO E COMPETIDORES HOMOGÊNEOS

Em nosso modelo, podemos formalizar o torneio da seguinte maneira. Considere um torneio com apenas um estágio e dois competidores, i e j . Cada competidor tem uma função de produção diferenciável $f(x, k)$, de forma que $f(0, 0) = 0$ e a sua matriz Hessiana seja estritamente negativa definida, onde $\partial f(x, k) / \partial x > 0$, $\partial f(x, k) / \partial k > 0$, $\partial^2 f(x, k) / \partial x^2 < 0$ e $\partial^2 f(x, k) / \partial k^2 < 0$. Considere, ainda, a função de custos³ $c(x, k) = c_x(x) + c_k(k)$, onde $c_x(0) = c_k(0) = 0$, $c'_x(x) > 0$ e $c''_x(x) < 0$, e $c'_k(k) > 0$ e $c''_k(k) < 0$. Os competidores são homogêneos (possuem as mesmas funções de produção e custo) e neutros ao risco.

³ A exclusão de um efeito cruzado entre x e k na função de custo é uma hipótese que visa isolar os efeitos dos custos do investimento em capital humano. Não é uma hipótese que necessariamente tenha que se verificar empiricamente.



A produção q do indivíduo observada pela empresa será uma função $f(x,k)$ da quantidade de capital humano k e do esforço x escolhidos⁴, multiplicada por um erro aleatório ε comum aos dois jogadores⁵:

$$\begin{aligned} q_i &= f(x_i, k_i) \cdot \varepsilon \\ q_j &= f(x_j, k_j) \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

A probabilidade $P(I,J)$ do indivíduo i ganhar do indivíduo j será:

$$P(I, J) = \frac{f(x_i, k_i)}{f(x_i, k_i) + f(x_j, k_j)} \quad (2)$$

Note que, como no caso do modelo de Rosen (1986), o fator aleatório comum e multiplicativo se anula e não afeta $P(I,J)$. O problema de maximização do jogador é:

$$\text{Max}_{x_i, k_i} P(I, J)(W_1 - W_2) + W_2 - c(x_i, k_i) \quad (3)$$

onde W_1 e W_2 são os prêmios para o primeiro e segundo lugares, respectivamente, e $W_1 > W_2$. Substituindo $P(I,J)$:

$$\text{Max}_{x_i, k_i} \frac{f(x_i, k_i)}{f(x_i, k_i) + f(x_j, k_j)} (W_1 - W_2) + W_2 - c(x_i, k_i) \quad (4)$$

Com base na função de maximização do indivíduo i , podemos propor:

Proposição 1: O indivíduo escolhe entre esforço e capital humano de maneira eficiente.

⁴ Poderíamos considerar as variáveis esforço x e capital humano k como vetores. Assim, o esforço x seria um vetor que representaria a combinação de todas as atividades desempenhadas pelo funcionário, enquanto k seria um vetor representando todas as características de capital humano do indivíduo, como educação formal e experiência. Por simplificação, mas sem perda de generalidade, podemos considerar x e k como simples variáveis representativas desse conjunto de características. De forma similar, poderíamos considerar q como o conjunto de todos os resultados (qualitativos e quantitativos) da produção do indivíduo observáveis pela firma. Iremos assumir que a empresa irá avaliar esses resultados de forma eficiente, ou seja, que a forma como é feita a avaliação não criará incentivos adversos (*moral hazard*) para que o trabalhador atue de forma contrária aos interesses da firma.

⁵ Estamos utilizando apenas o erro comum a todos os jogadores, e não erros individuais e independentes, pois, conforme demonstrado por Nalebuff e Stiglitz (1983) e Green e Stokey (1983), o modelo de torneio será mais eficiente em relação às outras formas de remuneração quanto maior o peso relativo do erro comum. No limite, caso não existisse erro comum, o torneio seria ineficiente.





Prova: No Apêndice A, demonstramos que uma condição ótima de maximização será

$$\frac{f'_x(i)}{f'_k(i)} = \frac{c'_x(i)}{c'_k(i)} \quad (5)$$

A Equação (5) tem uma importante interpretação microeconômica. Ela mostra que, no equilíbrio, a taxa marginal de substituição (TMS) entre x_i e k_i deve ser igual ao seu custo marginal de substituição (CMS). Se imaginarmos o indivíduo como uma firma com uma função de produção $f(x, k)$ e dois insumos, x e k , a condição TMS=CMS é uma condição necessária para a minimização de custos. Se essa igualdade não fosse verdade, existiria algum tipo de ajuste na utilização dos insumos que produziria a mesma quantidade com um custo menor (Varian, 1992, p. 50). Portanto, o competidor estará agindo de forma eficiente.

Proposição 2: Aumentos no prêmio incentivam tanto o esforço como o investimento em capital humano.

Prova: No Apêndice A, demonstramos que uma condição ótima de maximização será

$$\frac{c'_x(i)}{f'_x(i)} = \frac{c'_k(i)}{f'_k(i)} = \frac{f(j)\Delta W}{[f(i) + f(j)]^2} \quad (6)$$

A Equação (6) nos mostra que os valores de x_i e k_i (o esforço e o capital humano do jogador) dependem de $\Delta W = (W_1 - W_2)$, e que ΔW deve ser positivo e suficientemente grande para que o jogador tenha incentivos para se esforçar e para investir em capital humano, caso contrário ele irá preferir desistir de competir (*default*) e não vai se esforçar. Também podemos observar que um aumento no prêmio ΔW eleva a razão no lado direito da equação, e para manter a igualdade deve haver um aumento na relação entre o custo marginal e a produção marginal de x_i e k_i , no lado esquerdo da equação. Como o custo marginal cresce a taxas aceleradas, enquanto a produção marginal cresce de forma desacelerada, isto implica que é necessário um aumento de x_i e k_i para aumentar as duas razões da esquerda. Note que um aumento nesses fatores também causa um aumento em $f(i)$, no lado direito da equação, reduzindo o efeito do aumento em ΔW . Em suma, um aumento no prêmio implica um aumento em x_i e k_i , *ceteris paribus*.

Proposição 3: No equilíbrio, competidores homogêneos irão escolher o mesmo nível de esforço e o mesmo investimento em capital humano.

Prova: No Apêndice A, demonstramos que a função de resposta de i será

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \frac{\left[\frac{f'(y_j)}{f(y_j)} \right] c'(y_i)}{-D[f(y_i) + f(y_j)]} \cdot [f(y_i) - f(y_j)] \quad (7)$$

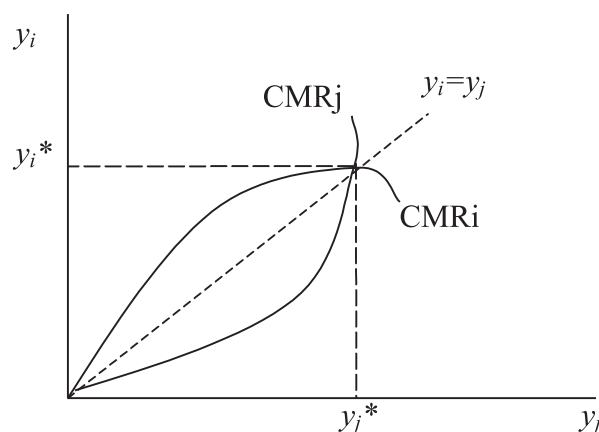
e a função de resposta de j será simétrica.



Os efeitos de variações de $f(j)$ sobre $f(i)$ na Equação (7) não são constantes. De forma semelhante ao resultado de Rosen (1986), temos que enquanto $f(j)$ for pequeno o suficiente, aumentos em $f(j)$ serão acompanhados por aumentos em $f(i)$, até um ponto de equilíbrio $f(i^*)=f(j^*)$. Depois desse ponto, aumentos em $f(j)$ serão acompanhados por quedas em $f(i)$. Em outras palavras, o jogador i irá aumentar x_i e k_i em resposta a aumentos de j para manter sua probabilidade de ganhar o jogo, seguindo as relações descritas na Equação (7), até um ponto de equilíbrio. Depois desse ponto, o custo de aumentar $f(i)$ é tão alto que i prefere diminuir x_i e k_i , pois o aumento no benefício esperado já não compensa o aumento nos custos. Podemos chegar a um ponto onde $f(j)$ é tão alto que i prefere não participar do torneio (*default*)⁶.

As curvas de melhor resposta estão demonstradas graficamente na Figura 1 abaixo:

Figura 1 – Curvas de Melhor Resposta



O que a função de melhor resposta representada na Equação (7) e na Figura 1 nos mostra é que, existindo um equilíbrio de Nash⁷ em estratégias puras, ele será tal que $y_i^*=y_j^*$, ou seja, $x_i^*=x_j^*$ e $k_i^*=k_j^*$. No equilíbrio, os competidores i e j irão escolher o mesmo nível de esforço e o mesmo estoque de capital humano. A probabilidade de cada um ganhar o torneio será de 0,5.

A partir desse resultado, podemos observar que o caso de competidores homogêneos estudado por Rosen (1986), onde ambos possuem a mesma habilidade $\tilde{a}$, é um caso especial de nosso modelo. O fato dos competidores possuírem a mesma

⁶ O competidor prefere não se esforçar quando x e k demandados são tais que o custo do esforço é maior que o prêmio esperado, ou seja, $c(x_i, k_i) > P(I, J)\tilde{A}W$.

⁷ Estamos supondo não existir possibilidade ou interesse de haver conluio entre as partes ou de haver forma de um competidor prejudicar o desempenho do outro competidor.





habilidade $\tilde{a}$ significa, na verdade, que eles possuíam as mesmas funções $f(x,k)$ e $c(x,k)$, e conseqüentemente escolheram, no equilíbrio, o mesmo estoque de capital k . Assim sendo, competidores homogêneos, por possuírem as mesmas funções de produção e de custo, irão escolher o mesmo esforço e capital humano no equilíbrio.

3. MODELO COM 1 ESTÁGIO E COMPETIDORES HETEROGÊNEOS

Agora vamos analisar o mesmo modelo, mas com competidores heterogêneos – que possuem uma característica exógena e imutável, com uma determinada distribuição na população. Como característica heterogênea, Rosen (1986) utilizou o fator $\tilde{a}_i$ para representar as habilidades e talentos naturais para o jogo do competidor i . Esse fator $\tilde{a}_i$ multiplicava o resultado do esforço do competidor. No nosso modelo, introduzimos essa “habilidade” $\tilde{a}_i$ de forma diferente, considerando o estoque de capital humano k como a variável que amplifica o resultado do esforço, podendo ser alterada através de investimentos do indivíduo – portanto não é uma característica exógena e imutável. Devemos, então, definir outro fator heterogêneo.

Adotamos no nosso modelo uma abordagem similar a de Moldovanu e Sela (2001). Os autores utilizam um fator de habilidade c_i como redutor dos custos do esforço, ao invés de multiplicador do resultado do esforço. O fator c_i multiplica o custo do esforço e, portanto, as pessoas mais habilidosas teriam um c_i de menor valor, resultando num menor custo do esforço. No nosso modelo, também utilizamos um fator $\tilde{a}_i$ como redutor dos custos. A diferença é que $\tilde{a}_i$ irá reduzir apenas os custos do investimento em capital humano. Conseqüentemente, as pessoas mais habilidosas terão um menor valor de $\tilde{a}_i$ que, como multiplica o custo de k , resulta em um menor custo de investimento em capital humano. Essa habilidade $\tilde{a}_i$ de investir é exógena e imutável, possuindo uma determinada distribuição F na população. Seguindo Moldovanu e Sela (2001), assumimos que $\tilde{a}_i > 0$ e que as habilidades são determinadas independentemente umas das outras, dentro de um intervalo $[m, 1]$ de acordo com a distribuição contínua F , sendo $F' > 0$ e $m > 0$. A escolha do intervalo é uma normalização. Cada competidor conhece sua própria habilidade e conhece a habilidade de seu concorrente (a informação é completa e simétrica).

Utilizando o fator de habilidade $\tilde{a}$ como multiplicador da função de custo de k , temos para cada competidor:

$$\begin{aligned} c_i(x_i, k_i) &= c_x(x_i) + \gamma_i c_k(k_i) \\ c_j(x_j, k_j) &= c_x(x_j) + \gamma_j c_k(k_j) \end{aligned} \quad (8)$$

lembrando que as funções c_x e c_k são iguais para os dois competidores, estando a diferença apenas na habilidade $\tilde{a}$. Assim, os indivíduos mais habilidosos serão aqueles que tiverem o menor valor de $\tilde{a}$ e, conseqüentemente, o menor custo de investimento em capital humano.

Proposição 4: No equilíbrio de uma competição entre indivíduos heterogêneos, ambos escolherão o mesmo nível de esforço, porém o indivíduo mais habilidoso investirá mais em capital humano e terá maiores chances de vencer o torneio (*survival of the fittest*).

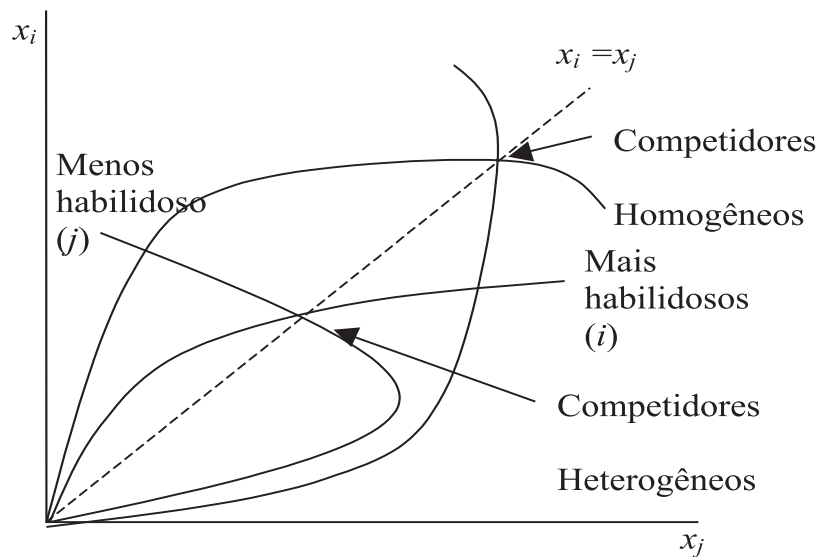
Prova: Ver Apêndice B.



Proposição 5: Em competições entre participantes homogêneos há um maior esforço por parte dos competidores do que em competições entre competidores heterogêneos

Prova: Graficamente, as curvas de melhor resposta encontradas no Apêndice B podem ser representadas conforme Figura 2 abaixo:

Figura 2 – Curvas de Melhor Resposta



Fonte: Adaptado de Rosen (1986, pg. 707)

A Figura 2 mostra que, no equilíbrio, os competidores heterogêneos i e j escolherão o mesmo esforço x^* , porém o estoque de capital humano k^* escolhido por i será maior e, portanto, ele terá uma maior produção $f(i)$ e uma maior probabilidade de ganhar o torneio. A Figura 2 também mostra como seriam as curvas de melhor resposta, caso os competidores fossem homogêneos (como no caso da Figura 1). Podemos ver que, no equilíbrio dos dois casos, $x_i^* = x_j^*$, mas o valor de x^* é maior na competição entre homogêneos. Esse resultado é similar ao encontrado por Rosen (1986): em competições entre participantes homogêneos há um maior esforço por parte dos competidores do que em competições entre competidores heterogêneos. O fato se explica pois, quando um competidor mais fraco⁸ enfrenta um mais forte, ele sabe que tem menor chance de vencer, resultando num menor valor esperado do

⁸ O competidor mais fraco no modelo de Rosen (1986) é aquele com a menor habilidade γ dada. No nosso modelo, o competidor mais fraco é aquele com o maior custo de investimento em capital humano k , e por isso irá investir menos e terá a menor habilidade ou estoque de capital humano.





prêmio e num menor esforço. Já o competidor mais forte, por saber que o mais fraco irá se esforçar menos, também diminui seu esforço, adequando-o a sua função de melhor resposta.

Conseqüentemente, seria interessante para a empresa selecionar os participantes do torneio, de forma a escolher competidores homogêneos. O próprio modelo original de Lazear e Rosen (1981) já demonstrava que torneios mistos (com competidores heterogêneos) eram ineficientes. Os autores sugeriram a introdução de sistemas de *handicap* nos torneios mistos para torná-los eficientes. Esse sistema consiste de um bônus ou auxílio para o competidor mais fraco. Com essa vantagem, seriam igualladas as chances dos dois competidores (uma aproximação do caso de competidores homogêneos), incentivando o aumento do esforço tanto do mais fraco quanto do mais forte.

Um outro ponto é a preferência da firma pelos melhores competidores. Nos modelos anteriores, os melhores competidores eram aqueles com a maior habilidade, uma característica exógena e dada. No nosso modelo, os melhores competidores são aqueles com o menor custo de capital humano, que por isso farão os maiores investimentos e se tornarão os mais habilidosos. Portanto, as firmas iriam preferir contratar para seus torneios aqueles candidatos com o menor custo de investimento. Uma das maneiras da firma atingir esse objetivo é através da prática de *screening*. A firma pode procurar por sinais que indiquem a capacidade do candidato, como resultados em concursos ou notas na universidade. Outra forma de evitar a seleção adversa de candidatos é cobrar taxas de entrada no torneio (ver Moldovanu e Sela, 2001, pp. 550 e 551), o que diminuiria o incentivo para que os piores candidatos viessem a se inscrever nos torneios.

4. CONCLUSÃO

Nos modelos de torneio encontrados atualmente na literatura, a habilidade produtiva do competidor, apesar de possuir papel central na determinação de seu prêmio esperado, é apresentada como uma variável exógena e imutável, não podendo ser objeto de escolha dos competidores. Porém, uma proposição fundamental da teoria de capital humano é que uma pessoa pode aumentar sua capacidade como produtora investindo nela mesma. Assim, um indivíduo poderia investir em capital humano e aumentar suas chances de vencer o torneio.

No presente artigo, propusemos um novo modelo de torneio, incluindo a possibilidade do competidor investir em seu capital humano. Em nosso modelo, a habilidade produtiva é uma variável endógena, determinada pelas escolhas do indivíduo quanto ao investimento em capital humano. Analisar o fator capital humano é fundamental para a melhor compreensão de diversos fenômenos da economia. Portanto, estudar como os torneios afetam o investimento dos funcionários em capital humano é uma importante contribuição para a teoria econômica.

Ao estudarmos o novo modelo mostramos que, supondo competidores homogêneos (com as mesmas funções de produção e custos), os indivíduos irão escolher os mesmos valores de esforço e investimento em capital humano, no equilíbrio. Assim, o caso de competidores homogêneos com a mesma habilidade produtiva exógena, estu-



dado em modelos anteriores, é, na verdade, um caso especial de nosso modelo. Os indivíduos são homogêneos não por terem a mesma produtividade exógena, mas por terem escolhido o mesmo investimento em capital humano.

O fator heterogêneo proposto no nosso modelo foi a habilidade α que afeta diretamente os custos do investimento em capital humano, e não a habilidade produtiva como nos modelos anteriores. Assim, os competidores mais habilidosos serão aqueles com a mais “barata” função de custo do investimento. No equilíbrio, mostramos que os trabalhadores mais habilidosos irão investir mais e terão maiores chances de vencer o torneio (*survival of the fittest*), dado o maior estoque de capital humano e a maior produção.

Dessa forma, demonstramos que a firma prefere contratar o funcionário mais habilidoso com a mais “barata” função de investimento. Isso significa que a empresa prefere o funcionário que aprende e se adapta facilmente, pois ele irá investir mais na sua formação e se tornar mais produtivo do que um funcionário que investe menos em capital humano. Em resumo, a firma prefere que entrem no torneio os jogadores com o maior potencial de se tornarem os mais produtivos.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Becker, Gary S. “Investment in Human Capital: A Theoretical Analysis”, *Journal of Political Economy*, supplement: October 1962, 70 (5), pp. 9-49.

_____. *Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis, With Special Reference to Education*. New York: National Bureau of Economic Research, 1964.

Green, Jerry R. and Stokey, Nancy L. “A Comparison of Tournaments and Contracts.” *Journal of Political Economy*, June 1983, 91(3), pp. 349-64.

Lazear, Edward P. and Rosen, Sherwin. “Rank-Order Tournaments as Optimum Labor Contracts.” *Journal of Political Economy*, October 1981, 89(5), pp. 841-64.

Moldovanu, Benny and Sela, Aner. “The Optimal Allocation of Prizes in Contests.” *American Economic Review*, June 2001, 91(3), pp. 542-58.

Nalebuff, Barry J. and Stiglitz, Joseph E. “Prizes and Incentives: Towards a General Theory of Compensation and Competition.” *Bell Journal of Economics*, Spring 1983, 14(1), pp. 21-43.

Rosen, Sherwin. “Prizes and Incentives in Elimination Tournaments.” *American Economic Review*, September 1986, 76(4), pp. 701-15.

Schultz, Theodore W. “Reflections on Investment in Man”, *Journal of Political Economy*, supplement October 1962, 70 (5), pp. 1-8.

Varian, Hal R. *Microeconomic Analysis*. New York: W. W. Norton & Company, third edition, 1992.



APÊNDICE A

Conforme Equação (4), a função de maximização de i é

$$\text{Max}_{x_i, k_i} \frac{f(x_i, k_i)}{f(x_i, k_i) + f(x_j, k_j)} (W_1 - W_2) + W_2 - c(x_i, k_i) . \quad (\text{A1})$$

As condições de primeira ordem (C.P.O.) serão:

$$\frac{\frac{\partial f(i)}{\partial x_i} f(j)}{[f(i) + f(j)]^2} \Delta W = \frac{\partial c(i)}{\partial x_i} , \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\frac{\partial f(i)}{\partial k_i} f(j)}{[f(i) + f(j)]^2} \Delta W = \frac{\partial c(i)}{\partial k_i} . \quad (\text{A3})$$

onde $f(i)=f(x_i, k_i)$, $f(j)=f(x_j, k_j)$, $c(i)=c(x_i, k_i)$ e $\Delta W=(W_1 - W_2)$. Rearranjando os termos das Equações (A2) e (A3), temos que:

$$\frac{f(j)\Delta W}{[f(i) + f(j)]^2} = \frac{\frac{\partial c(i)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(i)}{\partial x_i}} , \quad (\text{A4})$$

$$\frac{f(j)\Delta W}{[f(i) + f(j)]^2} = \frac{\frac{\partial c(i)}{\partial k_i}}{\frac{\partial f(i)}{\partial k_i}} . \quad (\text{A5})$$

Portanto, as C.P.O. serão atendidas quando:

$$\frac{c'_x(i)}{f'_x(i)} = \frac{c'_k(i)}{f'_k(i)} = \frac{f(j)\Delta W}{[f(i) + f(j)]^2} . \quad (\text{A6})$$

onde $f'_x(i)=\partial f(x_i, k_i)/\partial x_i$ e assim por diante. A condição de segunda ordem (C.S.O.) requer que a derivada da função de maximização do indivíduo (Equação A1) seja uma matriz Hessiana negativa semi-definida. Então é necessário que



$$c'_x(i) \left\{ \frac{f''_x(i)}{f'_x(i)} - \frac{2f'_x(i)}{[f(i) + f(j)]} \right\} - c''_x(i) < 0 \quad \text{e} \quad (\text{A7})$$

$$c'_k(i) \left\{ \frac{f''_k(i)}{f'_k(i)} - \frac{2f'_k(i)}{[f(i) + f(j)]} \right\} - c''_k(i) < 0$$

As C.P.O. e C.S.O. para o competidor j são obtidas de forma semelhante.

Rearranjando a Equação (A6), temos a relação:

$$\frac{f'_x(i)}{f'_k(i)} = \frac{c'_x(i)}{c'_k(i)} \quad (\text{A8})$$

Podemos formalizar a função de melhor resposta da seguinte forma. A Equação (A8) nos mostra o conjunto de cestas ótimas formadas por x^* e k^* que satisfaçam as C.P.O. para a maximização da utilidade do indivíduo. Podemos substituir cada cesta ótima por uma variável equivalente $y=(x^*,k^*)$, $\forall x^*$ e k^* factíveis. Desta forma, o competidor estaria maximizando a função

$$\text{Max}_{y_i} \frac{f(y_i)}{f(y_i) + f(y_j)} (W_1 - W_2) + W_2 - c(y_i) \quad (\text{A9})$$

com a C.P.O.

$$\frac{f'(y_i)f(y_j)}{[f(y_i) + f(y_j)]^2} \Delta W = c'(y_i) \quad (\text{A10})$$

e a C.S.O.

$$D = c'(y_i) \left[\frac{f''(y_i)}{f'(y_i)} - \frac{2f'(y_i)}{f(y_i) + f(y_j)} \right] - c''(y_i) < 0 \quad (\text{A11})$$

Formalizando esses resultados, temos que a função de melhor resposta do indivíduo i será:

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \frac{\left[\frac{f'(y_j)}{f(y_j)} \right] c'(y_i)}{-D[f(y_i) + f(y_j)]} \cdot [f(y_i) - f(y_j)] \quad (\text{A12})$$

A função de melhor resposta de j é simétrica.



APÊNDICE B

Reescrevendo as C.P.O. das Equações (A8) e (A10) para incluirmos o fator de habilidade γ , temos:

$$\frac{c'_x(i)}{f'_x(i)} = \frac{\gamma_i c'_k(i)}{f'_k(i)} = \frac{f(j)\Delta W}{[f(i) + f(j)]^2} \quad (\text{A13})$$

$$\frac{f'_x(i)}{f'_k(i)} = \frac{c'_x(i)}{\gamma_i c'_k(i)} \quad (\text{A14})$$

Podemos formalizar o problema da seguinte forma. Substituindo a variável k por uma função $k(x)$ que atenda a Equação (A14), teremos que o indivíduo i maximizará a função

$$\text{Max}_{x_i} \frac{f(x_i, k(x_i))}{f(x_i, k(x_i)) + f(x_j, k(x_j))} (\Delta W) + W_2 - [c_x(x_i) + \gamma_i c_k(k(x_i))] \quad (\text{A15})$$

com a C.P.O.

$$\frac{f'_x(x_i, k(x_i)) f(x_j, k(x_j))}{[f(x_i, k(x_i)) + f(x_j, k(x_j))]^2} (\Delta W) - \left[c'_x(x_i) + \gamma_i \frac{\partial c_k(k(x_i))}{\partial x_i} \right] = 0 \quad (\text{A16})$$

Reescrevendo a Equação (A14), temos a condição ótima

$$\gamma_i \frac{\partial c_k(k_i)}{\partial k_i} = \frac{\frac{\partial f(x_i, k_i)}{\partial k_i}}{\frac{\partial f(x_i, k_i)}{\partial x_i}} \cdot \frac{\partial c_x(x_i)}{\partial x_i} \quad (\text{A17})$$

que simplificamos para

$$\frac{\partial c_k(k_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{\gamma_i} \cdot \frac{\partial c_x(x_i)}{\partial x_i} \quad (\text{A18})$$

Substituindo a Equação (A18) em (A16) temos uma nova C.P.O.

$$\frac{f'_x(x_i, k(x_i)) f(x_j, k(x_j))}{[f(x_i, k(x_i)) + f(x_j, k(x_j))]^2} (\Delta W) - 2c'_x(x_i) = 0 \quad (\text{A19})$$

Observe que as habilidades γ não estão explícitas na Equação (A19). A C.S.O. será

$$D = 2c'_x(x_i) \left\{ \frac{f''_x(i)}{f'_x(i)} - \frac{2f'_x(i)}{[f(i) + f(j)]^2} \right\} - 2c''_x(x_i) < 0 \quad (\text{A20})$$



Encontramos simetricamente o resultado para j . No equilíbrio, é necessário que as C.P.O. dos dois competidores sejam atendidas. Portanto:

$$\frac{f_x'(i)f(j)(\Delta W)}{[f(i)+f(j)]^2} = 2c_x'(x_i) \quad (\text{A21})$$

$$\frac{f_x'(j)f(i)(\Delta W)}{[f(i)+f(j)]^2} = 2c_x'(x_j) \quad (\text{A22})$$

Para que as Equações (A21) e (A22) sejam atendidas simultaneamente, é necessário que:

$$\frac{f_x'(i)f(j)}{f_x'(j)f(i)} = \frac{c_x'(x_i)}{c_x'(x_j)} \quad (\text{A23})$$

ou seja,

$$f(i) \frac{c_x'(x_i)}{f_x'(i)} = f(j) \frac{c_x'(x_j)}{f_x'(j)} \quad (\text{A24})$$

Podemos reescrever a Equação (A24) como

$$f(i) \frac{\partial c_x(x_i)}{\partial f(i)} = f(j) \frac{\partial c_x(x_j)}{\partial f(j)} \quad (\text{A25})$$

Suponha o custo médio $CME(x_i) = c_x(x_i)/f(i)$. Então o custo total do insumo x_i , $c_x(x_i)$, pode ser substituído pelo custo médio $CME(x_i)$ vezes $f(i)$, ou seja, $c_x(x_i) = CME(x_i) \cdot f(i)$

Substituindo na Equação (A25) resulta em

$$f(i) \frac{\partial CME(x_i) \cdot f(i)}{\partial f(i)} = f(j) \frac{\partial CME(x_j) \cdot f(j)}{\partial f(j)} \quad (\text{A26})$$

Resolvendo a derivada temos

$$f(i) \left[f(i) \frac{\partial CME(x_i)}{\partial f(i)} + CME(x_i) \right] = f(j) \left[f(j) \frac{\partial CME(x_j)}{\partial f(j)} + CME(x_j) \right] \quad (\text{A27})$$

que pode ser reescrita como

$$f(i)CME(x_i) \left[\frac{f(i)}{CME(x_i)} \frac{\partial CME(x_i)}{\partial f(i)} + 1 \right] = f(j)CME(x_j) \left[\frac{f(j)}{CME(x_j)} \frac{\partial CME(x_j)}{\partial f(j)} + 1 \right]$$

$$\text{ou} \quad c_x(x_i)[\eta_{xi} + 1] = c_x(x_j)[\eta_{xj} + 1] \quad (\text{A28})$$



$$\text{onde } \eta_{xi} = \frac{f(i)}{CME(x_i)} \frac{\partial CME(x_i)}{\partial f(i)}$$

A elasticidade ζ mostra a sensibilidade do custo médio de x em relação a alterações em $f(x)$. Dadas as suposições feitas no início desta Seção sobre as funções $c_x(x)$ e $f(x)$, sabemos que: $CME(x)$ é diferenciável; $CME(0)=0$; $\partial CME(x)/\partial f(i)>0$ e $\partial^2 CME(x)/\partial f(i)^2>0$. Portanto, a elasticidade ζ será uma constante ou será crescente em função de $f(x)$.

Supondo que ζ é uma constante ζ^* , como as funções de custo de x são iguais para os dois jogadores, então $\eta_{xi} = \eta_{xj} = \eta^*$. Portanto, podemos reescrever a Equação (A28)

$$c_x(x_i)[\eta^* + 1] = c_x(x_j)[\eta^* + 1] \quad (\text{A29})$$

que simplificada nos mostra

$$c_x(x_i) = c_x(x_j). \quad (\text{A30})$$

Desta forma, como as função de custo de x são iguais, o equilíbrio só será possível quando $x_i = x_j$.

Suponha agora que a elasticidade η é crescente, e que $x_i > x_j$. Isso significa que $c_x(x_i) > c_x(x_j)$, então para mantermos a igualdade na Equação (A28) seria necessário que $\eta_{xi} < \eta_{xj}$, o que não pode ser verdade pois $f(x_i) > f(x_j)$. A mesma impossibilidade ocorre quando $x_j > x_i$. Conseqüentemente, o único equilíbrio possível é $x_i = x_j$.

Considerando que no equilíbrio sempre ocorrerá $x_i = x_j$, e que cada competidor obedece a C.P.O. descrita na Equação (A14), só teremos $k_i = k_j$ quando $\gamma_i = \gamma_j$. Ou seja, só teremos os dois competidores com o mesmo capital humano quando eles forem homogêneos. Se $\gamma_i < \gamma_j$, é necessário que $k_i > k_j$ no equilíbrio. Assim, se i for mais habilidoso (tiver um menor custo de investimento), ele irá escolher um maior capital humano. Utilizando os mesmos procedimentos anteriores, podemos achar o equilíbrio com relação a k através da equação

$$\gamma_i c_k(k_i)[\eta_{ki} + 1] = \gamma_j c_k(k_j)[\eta_{kj} + 1] \quad (\text{A30})$$

Com base nas mesmas conclusões sobre a elasticidade η , a Equação (A30) nos indica que, no equilíbrio, teremos

$$\gamma_i c_k(k_i) = \gamma_j c_k(k_j). \quad (\text{A31})$$

Desta forma, se o valor de γ_i for a metade do valor de γ_j , então o custo bruto do investimento $c_k(k)$ de i deverá ser o dobro do custo bruto de j , no equilíbrio, resultando em um investimento $k_i > k_j$.



Com base nas Equações (A20), (A21) e (A22), podemos resumir a função de melhor resposta do esforço de i da seguinte forma:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\left(\frac{f'_x(j)}{f(j)} \right) 2c'_x(x_i)}{-D[f(i) + f(j)]} \cdot [f(i) - f(j)] \quad (\text{A32})$$

A função de resposta de j é simétrica.