

VON NEUMANN E O MODELO DE EXPANSÃO ECONÔMICA UNIFORME: METODOLOGIA E ANÁLISE

Joanílio Rodolpho Teixeira*

Resumo: *Este ensaio trata do modelo de crescimento de von Neumann e são salientadas as características da abordagem para o problema de uma economia em expansão uniforme, assim como sua conexão com modernas teorias do crescimento. Apresentamos uma ilustração numérica do modelo, o que facilita a compreensão de um trabalho seminal na História das Idéias Econômicas. Além disso, consideramos vantagens e dificuldades do tratamento matemático da Análise Econômica, assim como conjecturas sobre o jogo de xadrez e a Teoria Econômica.*

Palavras-chave: *crescimento, modelagem, von Neumann.*

Abstract: *This paper deals with the von Neumann growth model and focuses on the main characteristics of his mathematical approach to the problem of an uniform expanding economy. Connection to the modern theories of growth are emphasised and we show a numerical illustration of this seminal work. We also consider some of the advantages and difficulties of a mathematical treatment of economic ideas. Furthermore, we raise some conjectures linking the chess game to the Economic Theory.*

Keywords: *growth, modeling, von Neumann.*

Classificação JEL: 041, P16, F02

* Departamento de Economia da Universidade de Brasília-UnB. Esse trabalho foi parcialmente desenvolvido durante nossa permanência como pesquisador convidado no CEPREMAP – Centre d'Études Prospectives d'Économie Mathématique Appliquées à la Planification – Paris, France, no período março – novembro 2002. Agradecemos ao CEPREMAP pelo estimulante ambiente que permitiu o avanço da pesquisa e ao CNPq pelo apoio ao projeto. Uma versão simplificada desse trabalho está publicada na Revista de Economia Contemporânea (2001) e agradecemos à mesma por permitir a utilização de parte do material no presente ensaio. Este contou com a colaboração de nossos alunos do programa de pós-graduação do Departamento de Economia da Universidade de Brasília, aos quais somos gratos pelas sugestões. Naturalmente, apenas o autor é responsável por erros e omissões. E-mail: joaniloteixeira@hotmail.com

Introdução

Um dos mais destacados marcos do desenvolvimento científico no século XX constitui-se no crescente envolvimento de eminentes matemáticos com a quantificação e formalização das Ciências Sociais, em particular da Economia. Economistas matemáticos e econometristas buscam tratar de modo mais rigoroso problemas de teoria e prática econômica. Naturalmente, a “precisão espúria” é encontrada na construção de um expressivo número de modelos. Isto pode ser parcialmente explicado pelo “garimpo” de formas algébricas para problemas que ainda não podem ser colocados em própria linguagem matemática. Parece trivial reconhecer que a natureza de certas estruturas econômicas ainda não foi estudada com suficiente cuidado para permitir uma modelagem adequada, isto é, precisa na aparência (forma) e também no conteúdo.

Por outro lado, não há como negar que têm ocorrido contribuições expressivas na Economia Matemática. Um exemplo significativo é a superação do processo da formalização baseado em mera contagem de equações por instrumentos matemáticos mais potentes. Janos (John) von Neumann contribuiu decisivamente nesse salto qualitativo. Seu modelo de uma economia caracterizada por um sistema de inequações, envolvendo produção conjunta das mercadorias, em que as atividades expandem uniformemente ao longo do tempo, tem sido visto como o embrião de diversos ramos da Economia Matemática. Entre elas, destacam-se a programação linear, teoria dos jogos, análise dinâmica de insumo-produto e a análise de atividades. O modelo de von Neumann representa aquilo que hoje é chamado de *activity analysis*, no qual existem m processos (atividades) e n mercadorias ($m > n$).

O principal objetivo deste ensaio é apresentar a importância do modelo de crescimento de von Neumann e salientar vantagens e limitações da utilização de instrumentos matemáticos na descrição e formulação analítica do problema do crescimento equilibrado. A crescente adoção de modelos matemáticos “simplificadores” da realidade na construção de teorias econômicas constitui-se em um tema de grande relevância. Ressaltamos a importância do enfoque de von Neumann, considerado por muitos como um marco fundamental na construção de modelos econômicos. Além disso, conjecturamos sobre a existência de analogias entre tal abordagem e a teoria enxadrística, aqui entendida como “miniciência”.

Von Neumann fez a apresentação original de seu estudo, oralmente, em um seminário na Universidade de Princeton, Estados Unidos, no início de 1932. Em 1937, uma versão do mesmo, em alemão, foi incluída em coletânea de ensaios editada por Karl Menger, em Viena. A publicação definitiva, contendo pouco mais de oito páginas, apenas ocorreu em 1945¹. Ela foi acompanhada por uma análise de conteúdo econômico do modelo, com cerca de nove páginas, na mesma edição de *Review of Economic Studies*, vol. 13. David Champernowne foi o autor de tal nota; que contou com a colaboração de Nicholas Kaldor e Pierro Sraffa. Isso era requerido em razão do elevado nível matemático (topologia) utilizado e a não familiaridade dos economistas com tal instrumental – uma generalização do teorema do ponto fixo de Brouwer.

¹ Note que o título original em alemão era *Über ein Okonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, traduzido para o inglês por O. Morgenstern como *A Model of General Economic Equilibrium*, que não reflete adequadamente o conteúdo original, como veremos adiante. Mathur (1965) argumenta que o instrumental matemático utilizado não era inteiramente necessário para estabelecer as conclusões econômicas relevantes do modelo.

Como argumenta Champernowne (1945) na introdução: “O mérito supremo deste trabalho está na elegância da solução matemática de um problema altamente generalizado na economia teórica. Mas o trabalho é de considerável importância tanto para economistas como matemáticos, pois trata simultaneamente de questões em diversos ramos da economia, que até o momento em que esse trabalho foi apresentado (em 1932) eram raramente considerados juntos como parte de um problema”.

Von Neumann trata da produção conjunta não como no caso trivial de bens que não podem ser obtidos separadamente tal como, digamos, lã e carne de carneiro. Em seu modelo as mercadorias, inclusive a força de trabalho, são insumos no início do processo produtivo e também resultado da própria atividade no final do período uniforme de produção. Em particular, temos um processo circular de produção (*circular flow*) que consiste na análise das condições técnicas e sociais que permitem a economia manter seu curso regular. Quando se completa dado ciclo produtivo, a distribuição do produto é restaurada possibilitando a expansão das atividades a uma taxa de expansão uniforme. Essa abordagem permite tratar tanto do capital fixo como circulante podendo descrever o desgaste e depreciação via diferentes estágios (como se fora bens distintos) no próprio processo produtivo.

Como argumenta Gilibert (1998, p. 109), o modelo de von Neumann não deve ser propriamente descrito como pertencente à Escola Neoclássica. Contudo seu trabalho tem sido lido e interpretado, por uma geração de economistas, como consistente com tal abordagem. Uma das razões para isso deve ser atribuída à tradução para o inglês, cujo título não reflete a preocupação fundamental do estudo. “*A model of General Economic Equilibrium*” é certamente um título palatável aos economistas, mas difere substantivamente do original cuja tradução literal é “*On an Economic Equation System and a Generalization of the Brouwer Fixed Point Theorem*”.

Em diversos sentidos, o modelo de von Neumann pode ser considerado *unique*. Seu esforço intelectual foi motivado por duas considerações teóricas aparentemente desconectadas. Uma consiste na possibilidade de se construir um modelo matemático internamente consistente e economicamente significativo. A outra é a própria generalização do teorema de *Brouwer*. O uso de inequações em vez de equações, a adoção do critério max-min associado à teoria dos jogos, assim como a concepção da dualidade entre preços e quantidades, além da prova formal dos resultados indicam claramente que o autor estava preocupado com o conteúdo inovador da sua contribuição matemática para o avanço da teoria econômica.

Em adição ao caráter matemático inovador do modelo, o problema que von Neumann trata é uma preocupação fundamental na história das idéias econômicas, desde os clássicos e Marx. Em particular, ele concentra sua atenção na trajetória que leva à taxa máxima de crescimento uniforme e as implicações de tal trajetória. Tem-se argumentado que tal modelo é muito simples quando examinado do ponto de vista econômico². Apesar de muitas de suas limitações como descrição do processo econômico real, sua formalização se tornou de fundamental importância nas modernas teorias do crescimento. O curioso, segundo Romer (1995), é que um expressivo subconjunto dos modelos de crescimento endógeno (*New Growth Theory*) não faz mais do que reviver, com diferentes roupagens e interpretações, o modelo linear de von Neumann.

² Não está presente no modelo um conjunto de características do modo de produção capitalista, como novos produtos, novos processos produtivos e, de modo geral, o que é conhecido como progresso tecnológico. Naturalmente, ele não trata de processos envolvendo capital humano, “*learning by doing*”, “*knowledge spillovers*” e outros bens não convencionais.

É interessante destacar que o impacto do trabalho de von Neumann na teoria do crescimento não foi imediato. Razões para isso são razoavelmente aceitas. Uma é a própria abordagem matemática que dificultava uma ampla compreensão do modelo. Outra é que aspectos do mesmo podem sugerir pelo menos duas interpretações. De um lado, ele pode ser lido, como já indicamos, como pertencente à tradição clássica. Por outro lado, pode-se compreender o modelo como uma análise neoclássica, em que se procura expandir a teoria walrasiana do equilíbrio geral, essencialmente estática, para uma abordagem dinâmica. Ressaltamos que essa interpretação usual contraria algumas hipóteses cruciais do modelo. Segundo Gilbert (1998, p.109), o tratamento do consumo, por exemplo, está em óbvia oposição à abordagem neoclássica. Outro exemplo está na hipótese que os bens são produzidos não apenas a partir dos “fatores naturais de produção” mas, e principalmente, *from each other*. Isto é, um processo circular de produção. É correto também se argumentar que para viabilizar uma interpretação neoclássica do modelo, diversas hipóteses originais do mesmo devem ser contornadas ou desconsideradas. Mesmo a adaptação do título original do trabalho obscurece o principal objetivo do texto, adequando-o a uma audiência formada na tradição *mainstream* – da economia do equilíbrio geral.

Segundo Mathur (1965, pp.25-26), o impacto do modelo de von Neumann na teoria econômica do crescimento não foi tão forte como talvez fosse esperado, porque o modelo não estava propriamente integrado nas preocupações correntes da macro dinâmica keynesiana e neokeynesiana. Certamente essa colocação tem a ver com a ausência, na abordagem de von Neumann, do problema da demanda efetiva. Kurz e Salvadori (1998, p.178) argumentam, entre outras coisas, que quando da publicação do trabalho, a visão então dominante era a da existência de apenas uma única teoria econômica, a da análise da oferta e da demanda. Análises teóricas baseadas nos “clássicos” tinham submergido ou caído no esquecimento. Além disso, o fato de o trabalho ter sido também apresentado no Colóquio de Karl Menger, em Viena, logo após a apresentação de Karl Schelesinger e Abraham Wall do modelo Walras-Cassel de equilíbrio geral, pode ter levado a uma associação espúria entre os mesmos.

No sistema walrasiano, a hipótese de “competição livre” é de fundamental importância. Cada indivíduo e cada firma são tratados como unidades totalmente independentes. São agentes individuais maximizadores independentes. Contudo, como pondera Oscar Morgenstern (1974, pp.6-7) “No modelo de von Neumann não existe problema de livre interdependência de processos e preços, mas na forma original, é deixado em aberto o que poderia ser a organização da economia”. Ele parece sugerir que o modelo em discussão descreve inter-relações que se aplicam tanto a economias centralmente direcionadas como economias capitalistas avançadas. Naturalmente, um problema a ser superado é que o modelo de von Neumann, como virtualmente toda teoria do crescimento econômico, trata basicamente de quantidades e preços de insumos e produtos físicos, negligenciando os serviços abstratos, que ganham crescente importância na economia contemporânea.

Gostaríamos ainda de salientar que von Neumann não busca a solução de um completo sistema dinâmico a partir de condições históricas dadas (dotações), mas supõe que o sistema determina endogenamente sua própria condição inicial. Logo, não havendo restrição *a priori* quanto à composição dos estoques originais, os níveis de atividades podem ser estabelecidos a partir de qualquer base não negativa. Ele situa seu problema de forma a-histórica e altamente abstrata. Naturalmente, formalismo e abstração por si não implicam necessariamente em afastamento do concreto, pois a realidade socioeconômica é sempre culturalmente mediatizada. Nesse sentido, é possível nos aproximarmos do real quanto mais agimos (ou formulamos teorias)

no universo das formas simbólicas. Afinal, se aparência e realidade fossem idênticas não haveria necessidade de ciência. No entanto, como Joan Robinson (1978) destaca, devemos ter cuidado em não fazer simplificações de tal modo que o modelo se desfaz (*falls to pieces*) quando elas são removidas. Tal não ocorre no enfoque de von Neumann, que pode ser repensado sob diversos ângulos sem perder sua consistência interna. Ele é bastante flexível.

No entanto, existe, um ponto crucial a discutir. Segundo Pasinetti (1993, p.3), o modelo de von Neumann, do ponto de vista estritamente analítico e matemático, tem a reputação de ser o mais elegante dos modelos de crescimento econômico. Ainda assim, tal formulação repousa, essencialmente no conceito de estrutura invariante ao longo do tempo. Nesse caso, faz sentido perguntar porque tal abordagem tem exercido, em geral, tamanha fascinação entre economistas, quando a dinâmica de capitalismo não é a do crescimento equilibrado.

No presente trabalho, além dessa introdução, é feita uma apresentação formal sucinta do modelo de von Neumann. Na mesma seção, consideramos certos avanços teóricos que contornam algumas das limitações originais do mesmo. Depois, apresentamos uma ilustração numérica que mostra, de modo simplificado, como se dá a determinação das variáveis endógenas do modelo. Seguindo temos as conjecturas, em que repensamos o problema das mudanças estruturais e fazemos analogia da construção de modelos econômicos com a construção da teoria enxadrística o que pode surpreender a muitos³. Por fim, temos a conclusão do trabalho.

Formulação matemática e extensões do modelo

O modelo de von Neumann trata da produção pura. Contudo, não é fácil decidir sobre a teoria específica de valor embutida no mesmo. Ele obtém os preços de produção, determinados completa e exclusivamente pelos processos (atividades) existentes. Sua abordagem não se baseia estritamente na teoria clássica do valor do trabalho, mas em uma reinterpretação dela, como argumenta Nícola (1987, p.226). Note-se que os resultados por ele obtidos dependem essencialmente das condições de oferta. A única maneira de as condições da demanda influenciarem no desempenho da economia é por meio do vetor dos meios de subsistência, mas tal vetor é parte da própria estrutura fixa de insumos requeridos. Já que a força do trabalho é vista como *animal farm*, expressão utilizada por Champernowne (1945), torna-se problemático conjecturar sobre preferências do consumidor. Contudo, a taxa do salário real é dada fora do sistema e nesse caso uma variação da mesma deve acarretar mudanças na solução de equilíbrio.

São cinco as regras de comportamento do modelo: (i) regra da lucratividade, garantindo que são utilizados apenas aqueles processos cujos preços de produção e taxa de juros implicam em lucros extras (super normais) nulos; (ii) regra dos bens livres, estabelecendo que, em equilíbrio, as mercadorias cuja produção excede a taxa de expansão uniforme da economia são bens não escassos e portanto têm preço nulo. Essa regra não se aplica a força de trabalho, cujo "*wage bundle*" é dado exógeno e independente tanto dos preços relativos como do nível do emprego; (iii) regra do sistema produtivo, indicando que o sistema de produção efetivamente utilizado terá maior taxa de expansão uniforme do que qualquer outro processo existente; (iv) regra da taxa de juros (ou lucro), mostrando que, em equilíbrio, a taxa de lucro (ou juros) é

³ É interessante salientar que von Neumann, segundo seu irmão Nicholas A. Vonnewman nos informou, tinha como *hobby* importante, na juventude, analisar às cegas (i.e., com o tabuleiro ausente) partidas de xadrez.

igual à taxa de expansão da economia; (v) regra da sistema de preços, anunciando que, em equilíbrio, o sistema de preços estará associado a uma taxa de juros cujo valor é menor ou igual a qualquer sistema alternativo de preços.

O que o modelo em discussão contém de essencial, nos abstraindo da elegância matemática, é a prova rigorosa de uma relação fundamental entre a taxa de crescimento uniforme da economia e a taxa geral de lucro. Sua contribuição oferece um notável *insight* para um problema teórico central, cuja abordagem se caracteriza pela generalidade.

Para sumarizar formalmente a abordagem de von Neumann vamos descrever o equilíbrio de uma economia em que existem n bens $G_1, G_2, \dots, G_n$, e m processos produtivos, $V_1, V_2, \dots, V_m$, onde $m > n$. As hipóteses essenciais são: retornos constantes de escala; ilimitada disponibilidade tanto da força de trabalho quanto de recursos naturais; todos os bens (ou mercadorias) são produzidos por meio dos mesmos bens; todas as rendas que excedem as necessidades de manter a força de trabalho são reinvestidas. A quádrupla (α, β, x, y) , onde α é o fator de expansão, β é o fator de juros, $x \geq 0$ e $y \geq 0$ são vetores representando, respectivamente, a intensidade de produção e os preços, A é uma matriz não-negativa indicando os insumos disponíveis, B é matriz não-negativa do produto, ambas têm dimensão $(n \times m)$. O fator de expansão é dado por $\alpha = 1 + g$, onde $g \geq 0$ é a taxa de crescimento da economia; o fator de juros é dado por $\beta = 1 + \pi$, onde $\pi \geq 0$ é a taxa de juros (lucro).

As questões que von Neumann procurou responder são as seguintes: *i*) quais processos são utilizados? *ii*) qual é a taxa de crescimento proporcional das atividades econômicas? *iii*) quais são os preços dos n bens? *iv*) qual é a taxa de juros (lucro)?

Dados os insumos $a_{ij} \geq 0$ e os produtos $b_{ij} \geq 0$, o processo i é definido como:

$$V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} G_j \rightarrow \sum_{i=1}^m b_{ij} G_i \quad (2.1)$$

A economia é constituída pela soma de todos os processos V_i utilizados na intensidade x_i . Logo:

$$\sum_{i=1}^m V_i x_i \quad (2.2)$$

Como a solução $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ e $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ não tem sentido econômico, segue-se: $\sum_{i=1}^m x_i > 0$ e $\sum_{j=1}^n x_j > 0$. Assim as inequações relevantes são:

$$\alpha \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \quad (2.3)$$

$$\beta \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j \quad (2.4)$$

Se a restrição (2.3) é do tipo estritamente menor, então $y_j = 0$; isto é, não existe excesso de produção. Do mesmo modo, se (2.4) é estritamente maior então $x_i = 0$; isto é, existe lucro, mas não existe equilíbrio. O problema central consiste em mostrar que existe solução para as

inequações (2.3) e (2.4), com $x_i \geq 0, y_j \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i > 0, \sum_{j=1}^n y_j > 0$, sendo a quádrupla $(\alpha, \beta, x_i, y_j)$ o conjunto de incógnitas. Note que as $m + n + 2$ condições a serem satisfeitas de fato se reduzem a $m + n$, já que apenas as razões são requeridas. De qualquer modo α e β devem ser *uniquely determined*.

Von Neumann prova que existe tal notação, mas para atingir esse objetivo ele supõe que $a_{ij} + b_{ij} > 0$, logo $A + B = C$ é uma matriz positiva. Seu significado econômico é que cada processo requer insumo positivo de todos os bens, o mesmo valendo para cada produto. Essa hipótese assegura a unicidade de α e β , evitando a partição da economia em subconjuntos decomponíveis.

Eliminado a possibilidade de (2.3) e (2.4) serem estritamente positivos, von Neumann mostra que:

$$\alpha_j(x) = j = \min_{j=1,2,\dots,n} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sum_{i=1}^m x_i b_i}{\sum_{i=1}^m x_i a_i} & , \text{ se } \sum_{i=1}^m x_i a_i > 0 \\ +\infty & , \text{ se } \sum_{i=1}^m x_i a_i = 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

onde $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$. Essa condição pode ser reescrita na forma $\alpha \geq \alpha_j(x)$, com $j = 1, 2, \dots, n$.

Do mesmo modo:

$$\beta_i(y) = i = 1, 2, \dots, m \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{j=1}^n y_j b_{ij}}{\sum_{j=1}^n y_j a_{ij}}, \text{ se } \sum_{j=1}^n y_j a_{ij} > 0 \\ +\infty, \text{ se } \sum_{j=1}^n y_j a_{ij} = 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n y_j b_{ij} > 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

onde $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Essa condição pode ser reescrita na forma $\beta \geq \beta_i(y)$, com $j = 1, 2, \dots, n$.

Fica então caracterizado que x_i, y_j determinam *uniquely* os valores de equilíbrio α e β . Von Neumann mostra que a solução constitui um *ponto de sela* e que $\alpha = \beta$. A prova de existência do *ponto de sela* foi obtida com o auxílio da generalização do teorema do ponto fixo de Brouwer⁴. Não é difícil perceber que o método de von Neumann (minmax) é fortemente relacionado a um resultado bem conhecido da teoria dos jogos com duas pessoas e soma zero (*zero-sum-two-person-games*); teorema que ele demonstrou originalmente em 1927 e modificou em 1947, no livro em co-autoria com Morgenstern.

Na verdade, não era necessário a von Neumann utilizar uma generalização desse teorema para obter a prova de existência da solução⁵. Essa é dada por $\alpha = \beta$, resultado que fica determinado apenas pela mais eficiente utilização das técnicas disponíveis, dado o salário real.

Podemos agora resumir as relações primais do modelo de von Neumann, seguindo a notação de Thompson (1987, p. 821), em que o vetor y de preços é substituído por p , por ser mais

⁴ O teorema de Brouwer é um poderoso instrumento analítico. Seu conteúdo é o seguinte: se $F(x)$ define um mapeamento ponto a ponto contínuo de um conjunto compacto convexo S em si mesmo, existe algum ponto $x^* \in S$ tal que $x^* = F(x^*)$. A prova deste teorema requer métodos topológicos avançados. Uma descrição simples do mesmo é apresentada em Dorfman, Samuelson e Solow (1958). Para maiores detalhes sobre a abordagem de von Neumann veja Balderston (1954) e Bauer (1979).

⁵ Bastava o teorema de Minkowski que trata de *separating and supporting hyperplanes*. Sabemos que em hiperplano H define dois meios espaços. Se, dados dois conjuntos convexos S, S' , podemos encontrar algum hiperplano H tal que S se encontra em um dos meios espaços definidos por H e S' no outro, H é chamado de *separating hyperplane* de S, S' . Se para um único conjunto convexo, podemos encontrar um hiperplano tal que S está contido em um dos meio espaços e pelo menos um ponto de S jaz no próprio hiperplano, ele é chamado *supporting hyperplane*. Aproveitamos para enunciar uma variante do teorema de Minkowski: “Se S é um conjunto convexo fechado e z^* é um ponto exterior a S , existe um vetor p e um ponto $x^* \in S$ tal que $px \geq px^* > pz$ para todo $x \in S$ ”. Desse teorema seguem diversos corolários importantes. [Veja Lancaster (1968), review 4].

familiar aos econometristas. Assim temos:

- a) $x_B \geq \alpha x_A$
- b) $Bp \leq \beta Ap$
- c) $x(B - \alpha A)p = 0$
- d) $x(B - \beta A)p = 0$
- e) $x_B p > 0$

A primeira expressão torna o modelo fechado no sentido de que os insumos de dado período, multiplicados por α , são não maiores que o produto do período anterior. A segunda faz com que a taxa de juros seja tal que a economia não possa exibir lucros extras. A terceira garante que qualquer mercadoria produzida acima das necessidades seja um bem livre e assim pode ser descartado a preço nulo, mas esse pressuposto não é válido para a força de trabalho. A quarta exclui de processos que requerem custos extras. A quinta expressão garante que o valor agregado das mercadorias produzidas é positivo, já que a matriz do produto é semi-positiva e tanto o vetor de intensidade quanto o de preços são semi-positivos.

Nas versões correntes da teoria do crescimento baseadas no modelo de von Neumann, em grande parte derivadas do trabalho de Kemeny, Morgenstern e Thompson (1956), algumas das hipóteses restritivas do modelo original foram afrouxadas. Por exemplo, foi removida a necessidade de C ser uma matriz positiva, substituindo-a pela proposição que cada linha de A e coluna de B devem conter pelo menos um elemento positivo. Com isso é contornada a restrição original de cada processo requerer insumo positivo de todos os bens, o mesmo valendo para o produto. Essa nova formulação também flexibiliza a necessidade da força de trabalho ficar limitada a receber apenas o salário de subsistência.

Morgenstern e Thompson, em trabalhos publicados em 1969 e 1976, generalizaram ainda o modelo para o caso de uma economia aberta. O esforço nessa direção foi completado por Lős (1974) e Moeschlin (1974). Nessas novas versões fica contornada a necessidade de todas as mercadorias superproduzidas serem bens livres, já que os preços das mesmas não devem cair abaixo dos seus respectivos preços de exportação ou subir acima dos de importação.

Uma das generalizações destacadas na teoria neoclássica consiste em introduzir decisões de consumo por parte das famílias e decisões de investimento por parte das firmas. No contexto desse marco teórico, é possível obter um completo modelo de equilíbrio geral multiperíodo.

Outra possibilidade, agora associada à abordagem ricardiana, é salientar aspectos distributivos, reconsiderando o modelo de von Neumann à luz da teoria sraffiana, na qual fica explicitado o esquema de repartição do produto líquido entre salário e lucro. No caso simplificado, em que os processos produtivos (lineares) são todos baseados na produção simples (não conjunta), foi provado por Lombardini e Nicola (1974) que a inclusão de decisões individuais de consumo não prejudica a integridade da fronteira taxa de salário - taxa de lucro, desde que exista um único fator primário. Estendendo essa análise para a situação em que existe produção conjunta, apenas os pontos fixos de uma certa transformação particular são soluções do modelo de von Neumann com demanda final exógena.

Como é bem conhecido, Sraffa (1960) utilizou sistemas de produção conjunta nos quais o número de processos utilizados é igual ao número de mercadorias – como consequência da minimização de custos. Como argumenta Schefold (1998, p. 195), para comparar os sistemas de

Sraffa e von Neumann, os primeiros economistas ricardianos usavam o conceito de crescimento equilibrado, com a taxa de lucro se igualando à taxa de expansão. Nas contribuições mais recentes, sobre tal comparação, tornou-se possível flexibilizar essa restrição, e permitir que a taxa de lucro seja superior a de crescimento. Esse tema é explorado por Schefold (1988) e Bidard (1991).

Uma vez mencionadas certas relações e diferenças entre von Neumann e Sraffa, é necessário voltar a atenção também para Leontief (1951). Para esses três autores a produção é o centro do sistema econômico, concebido como um processo circular. O objetivo essencial de Leontief é descrever e quantificar a estrutura de uma economia real, por meio de um modelo linear que opera com o par de matrizes (A e B) de insumo e produto, respectivamente. Quando cada processo se refere à produção de apenas uma mercadoria, a matriz B fica reduzida à matriz identidade. Nesse caso o modelo de Leontief pode ser visto como um caso particular do de von Neumann. Uma questão central se refere à possibilidade de substituir a forma extensiva, como base da produção conjunta, pelo modelo na tradição de Leontief, envolvendo produção simples. A abordagem do tipo von Neumann-Sraffa lança luzes sobre as dificuldades envolvidas.

O problema da diferenciação entre consumo proveniente dos lucros e aquele decorrente dos salários tem sido outra preocupação que parece se constituir em linha promissora de pesquisa. Partindo de uma concepção *a la von Neumann* e integrando idéias de Kaldor (1955) e Pasinetti (1962), assim como de Samuelson e Modigliani (1966), diversos pesquisadores têm procurado encaminhar trabalhos de natureza mais agregada. Eles tratam de problemas ligados ao processo de crescimento e distribuição (longo prazo) envolvendo classes ou grupos sociais. O ponto focal dessas análises está na possibilidade da existência de *steady states*, em ambientes caracterizados por diferentes propensões a poupar entre trabalhadores e capitalistas (ou distintos grupos).

Pasinetti (1966), por exemplo, mostrou que, sob certas hipóteses, é possível obter-se, em *steady state*, a equação de *Cambridge* – essa se constitui na igualdade entre a taxa de lucro e a taxa de crescimento dividida pela propensão a poupar dos capitalistas. Note que tal resultado independe da taxa de poupança (positiva) dos trabalhadores, desde que ela seja inferior a dos capitalistas e também menor que a participação dos lucros na renda multiplicada pela propensão a poupar dos capitalistas. Esse resultado que desempenhou papel importante na controvérsia entre as *duas Cambridges* (Inglaterra versus Estados Unidos) baseia-se, essencialmente, na hipótese da constância da distribuição da renda e riqueza (fatos estilizados). Por outro lado, a taxa de crescimento de equilíbrio no longo prazo é a natural (dada exogenamente) e não a de von Neumann (endógena).

Trabalhos de Morishima, principalmente seu livro publicado em 1973, em que é proposto um repensar de Marx à luz de von Neumann, também geraram interesse e polêmica na teoria econômica. Diversos pesquisadores procuraram incorporar os esquemas de reprodução de Marx no modelo de von Neumann. É importante salientar que a passagem de um paradigma holístico ou baseado na totalidade (Marx) para outro envolvendo basicamente relações técnico-econômicas (von Neumann) apresenta dificuldades⁶.

⁶ Para muitos a abordagem de Marx representa o aspecto econômico de uma filosofia da história, e não uma teoria econômica voltada para si mesma. Existe, no entanto, uma distinção entre marxistas (que compartilham o conjunto dos pressupostos de Marx), os marxianos (que aceitam uma parte dos mesmos) e os marxólogos (que embora não compartilhem a visão, têm interesse nos trabalhos de Marx, como é o caso de Schumpeter).

Até esse ponto estivemos preocupados com considerações sobre o modelo geral de equilíbrio econômico de von Neumann descrito por um número finito de atividades geradas em um sistema poliédrico. Essa característica foi ampliada por Gale (1956) e Karlin (1959), entre outros, para situações que envolvem um nível bastante elevado de conhecimento matemático. Como podemos verificar, o trabalho pioneiro de von Neumann tem servido de notável inspiração para economistas e matemáticos, bem sucedidos no processo de reelaboração técnica e refinamentos formais do modelo. Contra-argumentando, tal sucesso obscurece, ou não deixa de negligenciar questões problemáticas como tempo, moeda, avanço tecnológico, incerteza e o processo de ajustamento. Pode-se acrescentar a dificuldade de integração, no modelo, da teoria do crescimento com a das flutuações cíclicas.

Determinação das variáveis – ilustração numérica

Para ilustrar como as variáveis são determinadas no modelo de von Neumann, vamos apresentar uma versão simplificada do mesmo. É suposto que não existe depreciação do capital, apenas uma unidade de mão-de-obra e só dois períodos são considerados; essa abordagem baseia-se em Mathur (1965)⁷. Assim, consideramos o caso de uma economia com um bem indestrutível (equipamento), usado por um homem para produzir o bem de consumo ou o próprio equipamento. A quantidade de bem de consumo e as necessidades físicas de equipamento são parâmetros tecnológicos do sistema. O trabalhador não possui equipamento e é pago em espécie (bem de consumo), *in advance*. Ele nada poupa, mas os proprietários são “espíritos desincorporados”, nada consomem e reinvestem a totalidade dos lucros.

Admitamos que a economia é organizada de tal modo que uma taxa de lucro *steady state* venha ocorrendo e a expectativa é que ela se manterá. Suponhamos que a economia está crescendo e gerando o emprego correspondente. Existe, fora da economia, um exército industrial de reserva do qual são aproveitados os trabalhadores necessários para a expansão do processo produtivo. Tal economia fica caracterizada pela Tabela 1, *process – matrix*:

Tabela 1

Mão de Obra	Insumos Físicos		Produto Físico	
Homens / ano	Bens de consumo	Equipamento	Bens de consumo	Equipamento
1	1	1	b_0	1
1	1	1	0	$b_1 + 1$
2	2	2	b_0	$b_1 + 1$

⁷ Ressaltamos que essa ilustração, extremamente simplificada busca apenas familiarizar o leitor com algumas das características do modelo de von Neumann e estimulá-lo a pesquisar trabalhos mais avançados.

Uma vez aceitas tais hipóteses, pode-se determinar a taxa de lucro, a taxa de crescimento, o preço do equipamento (em termos de bem de consumo) e a distribuição do trabalho entre os dois setores. Um problema importante está nas relações (nível ou intensidade) dos processos adotados no setor de bem de consumo e de investimento. Naturalmente essa economia crescerá uniformemente (*steady rate*) se o trabalho é distribuído entre os dois processos de modo que a produção de ambos os bens expande à mesma taxa α . Assim, se a distribuição do trabalho entre os setores é respectivamente x_1 e x_2 , a partir da primeira desigualdade de von Neumann percebe-se que:

$$(x_1 + x_2)\alpha \leq x_1 b_0 \quad (1)$$

$$(x_1 + x_2)\alpha \leq x_2 (b_1 + 1) + x_1 \quad (2)$$

Adicionamos a restrição:

$$(x_1 + x_2) = 1 \quad (3)$$

Como os dois bens são *priced goods*, eles devem crescer à mesma taxa. Logo, as relações (1) e (2) são igualdades e, portanto, o sistema formado por essas três equações pode ser resolvido:

$$\alpha = \frac{b_0(b_1 + 1)}{b_0 + b_1} \quad (4)$$

$$g = (\alpha - 1) = \frac{(b_0 - 1)b_1}{b_0 + b_1} \quad (5)$$

$$x_1 = \frac{b_1 + 1}{b_0 + b_1} \quad (6)$$

$$x_2 = \frac{b_0 - 1}{b_0 + b_1} \quad (7)$$

Pode-se encontrar esse resultado multiplicando-se, na Tabela 1, a linha 1 por $(b_1 + 1)$ e a linha 2 por $(b_0 - 1)$, e procedendo-se a adição, o que nos leva à tabela abaixo:

Tabela 2

Mão de Obra	Insumos Físicos		Produto Físico	
Homens / ano	Bens de consumo	Equipamento	Bens de consumo	Equipamento
$B_1 + 1$	$b_1 + 1$	$b_1 + 1$	$\rightarrow$	$b_1 + 1$
$B_0 - 1$	$b_0 - 1$	$b_0 - 1$		$(b_0 - 1)(b_1 + 1)$
$b_0 + b_1$	$b_0 + b_1$	$b_0 + b_1$	$\rightarrow$	$b_0(b_1 + 1)$

Podemos ver que o fator de expansão da economia será igual ao obtido na equação (4). Por analogia, para os preços, façamos o preço do equipamento ser medido em termos do bem de consumo. Assim:

$$(1 + p)\beta \geq b_0 + p \quad (8)$$

$$(1 + p)\beta \geq 0 + p(b_1 + 1) \quad (9)$$

Essas duas relações serão vistas como identidades, já que ambos os processos são utilizados. Nesse caso, as duas equações fornecem a solução para α (que é igual a β) e p , independentemente das equações (1), (2) e (3). Aqui temos o significado do termo “solução dual para preços e taxa de lucro” no modelo de von Neumann. Se conhecemos α pela equação (4), podemos incluí-lo na (8) para encontrar p e também verificar a partir da equação (9) que p e α realmente a satisfaz. A relação de preços é $p = b_0/b_1$. Retornando a ilustração numérica temos a tabela abaixo:

Tabela 3

Mão de Obra	Insumos Físicos		Produto Físico	
Homens / ano	Bens de consumo	Equipamento	Bens de consumo	Equipamento
1	1	1	2	1
1	1	1	0	4
2	2	2	2	5

Pela Tabela 3 podemos verificar que as intensidades x_1 e x_2 serão as seguintes:

$$x_2 = \frac{b_0 - 1}{b_0 + b_1} = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{b_0 - 1}{b_0 + b_1} = \frac{1}{5}$$

Como o denominador das duas expressões é igual, pode-se multiplicar a primeira linha por 4 e a segunda linha por 1, obtendo-se:

Tabela 4

Mão de Obra	Insumos Físicos		Produto Físico	
Homens / ano	Bens de consumo	Equipamento	Bens de consumo	Equipamento
4	4	4	8	4
1	1	1	0	4
5	5	5	8	8

Da Tabela 4 percebe-se que o fator de expansão (α) das mercadorias “bem de consumo” e “equipamento” é igual a $8/5$. Como já indicado, em equilíbrio, para que haja uma taxa de expansão máxima, a taxa de juros (lucro) é $g = \alpha - 1 = 3/5 = 60\%$. É fácil verificar que o preço da mercadoria “equipamento” em termos da mercadoria “bens de consumo” é $p = b_0/b_1 = 2/3$.

A partir desses resultados, pode-se calcular o investimento, o consumo e conseqüentemente a renda nacional. O investimento (I) é obtido pela diferença entre o estoque de capital (bens de consumo mais equipamentos) do final e do início do período:

$$8 + 8(2/3) = 13,33 \text{ período final}$$

(-)

$$5 + 5(2/3) = 8,33 \text{ período inicial}$$

$$\text{Investimento} = 5 \text{ unidades monetárias}$$

Em equilíbrio, a poupança (S) é igual ao investimento. Por outro lado, o consumo é dado pelo valor da mercadoria “bem de consumo”, portanto igual a 5 unidades. Assim, a renda nacional (igual a consumo mais investimento) representa 10 unidades monetárias.

Podemos então determinar a taxa de poupança (investimento) da economia, que é igual a $S/Y = 0,5$. Façamos agora a comparação dos resultados dessa ilustração com aquela da teoria do crescimento de Harrod-Domar⁸. Nesse caso, tem-se que a taxa de expansão da economia, dada por $(S/Y) \cdot (Y/K) = (S/K) = 5 / (25/3)$, é igual a 60%, que é precisamente a taxa de expansão (equilibrada) máxima do mundo de von Neumann.

Naturalmente a ilustração que apresentamos simplifica excessivamente o tema já que o modelo de von Neumann trata da produção conjunta, o que não foi acima contemplado. Considere, por exemplo, um modelo simples com dois bens de capital, ambos usados na produção de ambos. Suponha também que eles são parcialmente *worn out* depois do uso em um certo período e completamente exauridos após a segunda utilização. Lembrando que um aspecto fundamental do modelo de von Neumann está na possibilidade de analisar a depreciação, a partir da produção conjunta, os “quatro bens” são assim definidos:

x_1 = novo tipo de capital 1

x_2 = uma vez utilizado tipo de capital 1

x_3 = novo tipo de capital 2

x_4 = uma vez utilizado tipo de capital 2

Nesse contexto, uma atividade usando novo capital gerará como *output* o capital (do mesmo tipo) que restou, juntamente com o novo produto. Se dado capital já foi utilizado como insumo, ele não reaparece como parte da produção do período. Tal modelo pode ser representado

⁸ O modelo de crescimento de Domar (1946) é freqüentemente incluído junto ao de Harrod (1939) em virtude da similaridade formal dos resultados centrais obtidos pelos dois autores. Apesar de disputas sobre tal similaridade a literatura econômica tem apresentado um título conjunto para tal modelo, onde a taxa de crescimento equilibrado da economia é dada pela multiplicação da taxa de poupança pela relação produto-capital. [Veja Jones (1979)] .

pela tecnologia abaixo. A notação é convencional:

$$\begin{array}{cccc}
 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\
 B & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} & A & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{array}
 \end{array}$$

Fica para o leitor a análise da estrutura apresentada, que se baseia em Lancaster (1968). Ela captura de forma interessante alguns elementos da formulação de von Neumann, assim como suas limitações, incluindo a linearidade do modelo e a ausência de progresso tecnológico.

Conjeturas

Como vimos, o modelo de crescimento de von Neumann trabalha com crescimento equilibrado, isto é, mesmas taxas de crescimento para todos setores da economia. Alguns economistas podem perguntar porque tanto interesse neste modelo, já que no mundo real o que predomina são taxas de expansão diferenciadas entre os setores. Apesar de descartar, *a priori*, qualquer reflexão genuína sobre desapropriações e mudanças estruturais, o modelo de von Neumann (crescimento uniforme) fornece uma inspiração fundamental no sentido da criação de novos instrumentos de análise para os complexos problemas da teoria e realidade econômica.

Contudo, é importante indicar alguns problemas metodológicos associados à construção desse tipo de modelo. Tal enfoque pode ser visto como uma ilusão com pitadas de erro tecnocrático, mas também com viés ideológico. Ele baseia-se na hipótese de expansão contínua e equilibrada do sistema econômico. É criada uma dinâmica do crescimento multisetorial a uma taxa uniforme que se auto-realizaria. No mundo real, tal não ocorre, o que sugere a necessidade de vasculhar algumas das razões dessa fascinação dos economistas matemáticos pelo modelo de von Neumann.

Para a corrente ortodoxa, essencialmente, um modelo econômico é uma concepção lógico-matemática que contém o *hardcore* de determinada visão teórica. As hipóteses do modelo devem ser mutuamente consistentes e as conclusões decorrentes devem ser deduzidas formalmente de modo rigoroso. As operações lógico-matemáticas buscam garantir a coerência interna do raciocínio e a arte da modelagem consiste na abstração, dedução e interpretação. Naturalmente a relevância do problema deve ser também considerada.

Segundo Piaget (1967, p. 22): “Conhecer não consiste, com efeito, em copiar o real mas em agir sobre o mesmo e transformá-lo (em aparência e realidade), de maneira a compreendê-lo em função dos sistemas de transformação às quais são ligadas suas ações”. Esse é um projeto ambicioso e jamais se completa. O que o pesquisador tem pela frente é um longo caminhar, vencer barreiras utilizando sua percepção do real e sua energia criadora. É legítimo perguntar se determinado esforço intelectual contribui decisivamente para o avanço do conhecimento.

Não é de se surpreender que a teoria econômica, especialmente aquela expressa na forma de modelos matemáticos, tenha objetivos relativamente ambiciosos. A proposta de pesquisar modelos “ingênuos” pode ser defendida com base no argumento que algumas características pouco aceitáveis dos mesmos serão eventualmente superadas. Desse ponto de vista, modelos

como o de von Neumann são protótipos de outros mais realistas mas também mais complexos. Ele trata de uma concepção multisetorial (análise de atividades) dinâmica. Contudo, uma autêntica concepção dinâmica deveria tratar das variações na estrutura dos preços, produção e emprego, que emergem de modo não transitório. Para captar esse processo o modelo deve levar em consideração a existência de diferentes taxas setoriais de crescimento, tanto da produtividade quanto das demandas. Ora, qualquer concepção, por mais sofisticada que seja, baseada na dinâmica da expansão uniforme, parece sugerir um hiato surpreendente entre o modelo e o mundo real. Como vimos, a abordagem de von Neumann preserva ao longo do tempo as mesmas proporções, descartando *a priori* qualquer reflexão genuína sobre desproporções e mudanças estruturais.

Certamente, o tratamento analítico de um processo tão complexo como da reprodução e expansão da economia, das flutuações relativas dos preços, modificações desestabilizadoras na composição do produto, escolha de técnicas e aprendizado, se constitui em desafio imenso, que impõem barreiras insuperáveis às mentes mais brilhantes. Assim, é necessário selecionar o problema específico, proceder às simplificações necessárias, “reconstruir” a realidade e verificar em que medida, ou dentro de que limites, se está fornecendo uma “explicação” adequada para um problema concreto. A busca da superação das dificuldades da formalização tem nutrido o imaginário dos economistas. Muitos vêem as diversas teorias como conjuntos alternativos de hipóteses com determinado conteúdo ideológico e empírico. Os modelos seriam, essencialmente, construções lógico - matemáticas simplificadoras das teorias.

Se as ponderações acima são aceitas como razoáveis, torna-se estimulante ponderar sobre a fascinação dos economistas com alguns modelos específicos. Esse é o caso do modelo de von Neumann. Diversas são as conjecturas possíveis. Uma tem a ver com a própria qualidade matemática da abordagem. Ele trata do desenvolvimento analítico de um problema topológico que se ajusta sintética e elegantemente ao estudo de um sistema auto-regulador em expansão uniforme. A possibilidade de afrouxar algumas hipóteses originalmente restritivas sugere caminhos a percorrer. Isso pode ser feito com autonomia e coerência, requerendo para tanto noções indispensáveis de topologia e economia, áreas em que têm ocorrido notáveis progressos assim como profundos desapontamentos.

Segundo a corrente dominante, para a Economia vir a ser uma “verdadeira ciência” é necessário que a teoria econômica tenha conteúdo matemático. O *status* da mesma ficaria enriquecido por tal motivação e os participantes nesse esforço – economistas matemáticos e/ou econometristas – estão em posição de destaque não apenas na comunidade acadêmica mas também no mundo dos negócios e da política.

Alguns críticos mordazes argumentam que a busca da excelência matemática por si só é insuficiente. Tal atividade seria parecida com aquela dos jogadores de xadrez. Segundo George Bernard Shaw, os últimos “são pessoas que crêem fazer qualquer coisa séria enquanto estão simplesmente perdendo tempo”. Madame Sévigne ainda acrescenta que “o xadrez é muito difícil para um jogo e pouco sério para uma ciência ou arte”. É claro que essas são críticas extremadas, pois o conteúdo do jogo de xadrez se fecha em si mesmo, enquanto o da teoria econômica abre uma janela para a compreensão de nossa circunstância.

Outra conjectura sobre as razões da fascinação exercida pelo modelo de von Neumann tem a ver com o talento natural para a matemática que parece emergir espontaneamente em determinados indivíduos, possibilitando-lhes, precocemente, algumas contribuições expressivas. Até certo ponto, a economia matemática, a música e novamente o xadrez, são áreas que demandam

uma enorme concentração de energia, mas não requerem expressivas vivência e riqueza cultural. Contudo, exemplos como o de Capablanca (xadrez) e Mozart (música) não têm paralelos na história do pensamento econômico. Usualmente, o imaginário coletivo tem propensão a ver em enxadristas e economistas matemáticos elementos de alienação aos problemas do mundo real. Mentes mais abertas para a diversidade da condição humana argumentariam que é importante deixar desabrochar as mais diversas flores.

É ingenuidade negar que a formação dos economistas matemáticos tem privilegiado um compromisso conservador entre as exigências da academia e os imperativos do capitalismo moderno. Contudo é obscuro não perceber a importância da modelagem no tratamento um expressivo conjunto de problemas econômicos. Talvez a matemática seja mais aplicável a algumas áreas que outras. O que deve ser posto em xeque é se sua contribuição em determinadas situações é decisiva e insubstituível em relação a outros métodos cognitivos.

Naturalmente, o economista bem treinado deve ter como preocupação primária a análise de determinado problema concreto e para isso buscar os melhores métodos disponíveis. Como argumenta George (1988, p. 6): “As idéias econômicas não devem ser rejeitadas ou ignoradas simplesmente porque parecem ser difíceis de serem tratadas pelas técnicas padrões da modelagem. Pode ser necessário desenvolver novas técnicas, talvez utilizando novos ramos da matemática”.

O trabalho de von Neumann sobre o crescimento uniforme fornece uma inspiração fundamental no sentido de estimular mentes receptivas a criarem novos instrumentos de análise para difíceis problemas da teoria econômica. Seu trabalho seminal realmente não contempla concepções complexas como a da transformação estrutural. É de se esperar que novas gerações de economistas matemáticos sejam capazes de desenvolver novos métodos que possam tratar como processo único as principais mudanças de proporções e reestruturações da dinâmica do desenvolvimento econômico. Mas o tipo de matemática requerido, o da organização, reorganização e reestruturação, é um problema analítico que ainda está por se constituir na forma de uma álgebra qualitativa.

Naturalmente, existem algumas tentativas de se tratar o problemas da alocação e criação de recursos⁹, e de analisar o desempenho de determinadas economias, utilizando conceitos direta ou indiretamente associados a von Neumann. Essas abordagens tendem a apresentar certo viés tecnocrático e um dos esforços mais expressivos nessa área de aplicação é de Murakami, Tokoyama e Tsukui (1976). Eles analisam a possibilidade de uma trajetória eficiente de acumulação e o turnpike (no sentido de auto-estrada ou rodovia expressa) para a economia japonesa, mas esse é um assunto que já abordamos em outros trabalhos [Veja Teixeira (1978) e (2001)].

A idéia de planejar a economia levando em consideração o teorema da auto-estrada, conjectura primariamente levantada por DOSSO [Dorfman, Samuelson e Solow (1958)] que assegura (na maior parte do plano) a maior taxa possível de crescimento equilibrado apresenta certa atração. No entanto, ela é contraposta por aqueles que contemplam o desempenho real das economias do ponto de vista do desequilíbrio na dinâmica estrutural. Pasinetti (1993) argumenta que as mais evidentes objeções a modelos de dinâmica proporcional surgem espontaneamente

⁹ Deve ficar claro que desenvolvimento econômico envolve essencialmente esses dois problemas. A utilização de recursos trata da explicação do “misterioso” grau de coerência que pode ser observado, em períodos normais, emergir do movimento aparentemente anárquico em economias de mercado. A criação de recursos explica como decisões quanto ao uso dos “fatores de produção” afetam o desempenho do sistema econômico. A distribuição dos recursos da produção está presente.

quando se observa a realidade, caracterizada por um processo contínuo de mudanças relativas (sistemáticas e irreversíveis) na estrutura setorial das economias. Tal desempenho excluiria, como irrelevante, qualquer concepção teórica baseada na possibilidade de uma trajetória ou assintótica para o crescimento equilibrado. Essa visão contrasta com as teorias dominantes de crescimento econômico, que são essencialmente a-históricas em caráter. Naturalmente, quando o progresso tecnológico e as mudanças estruturais são caracterizados, a História desempenha um papel fundamental, o que não ocorre com o modelo de von Neumann, ou presentes extensões.

Para avançar na compreensão do método convencional para se desenvolver uma teoria e seu modelo representativo, seguindo Hollis e Nell (1975), retornamos àquilo que alguns consideram uma “miniciência”, cujo conteúdo é o jogo de xadrez. Essa analogia possui algum interesse em termos metodológicos. Nossa consideração será exposta de maneira sucinta, pois apenas pretendemos delinear aspectos que tenham relevância no contexto do presente trabalho – o do modelo de expansão econômica uniforme de von Neumann. Contudo, a abrangência dessa visão metodológica é bastante ampla.

Como podemos saber se determinada abertura (teoria) do jogo de xadrez é bem fundamentada? É notório que a “arte do Caissa”¹⁰ requer efetividade no processo de previsão e refutação das variantes pouco promissoras. É necessário podermos demonstrar que uma sequência de movimentos é melhor, do mesmo modo que um determinado teorema é correto ou certo conceito aplicável. O sucesso da utilização de um teorema incompletamente provado torna mais provável que o referido teorema seja finalmente demonstrado. Aqui a lógica triunfa sobre a experiência, no sentido de que a mera observação não pode provar o teorema, enquanto uma prova definitiva garante a autenticidade da observação.

Por outro lado, sempre cabem dúvidas sobre o âmbito de aplicação, mesmo de um teorema provado, e a experiência traça seus limites prováveis. Nesse caso, a experiência triunfa sobre a lógica, pois a análise é uma habilidade que pode faltar mesmo àqueles que possuem completa compreensão da teoria. A dúvida não é se a “hipótese” é verdadeiramente um teorema, mas se o teorema se aplica. Naturalmente, teoremas tentativos são provados ou descartados. Uma teoria enxadrística sólida, ou bem fundamentada, é aquela que se pode demonstrar que garante um melhor jogo. Do mesmo modo, um modelo se fortalece pelo apoio de uma teoria bem fundamentada. O teste definitivo de um modelo, para muitos, inclui a capacidade de gerar provisões “corretas”. Mas a previsão que aqui tratamos não é simplesmente aquela referente à projeção a partir da experiência. Estamos discutindo a aplicação correta de um teoria que leva a resultados analíticos expressivos, i.e., que não contradizem as experiências do mundo real.

Se essa argumentação é válida, então devemos ter cautela com os magníficos resultados do modelo de von Neumann. Ele possui óbvias amarras das quais é difícil nos libertar, caso estejamos preocupados em melhor modelar para compreender e transformar o mundo real. Contudo, passa distante a impertinência de pensar que tal modelo constitui-se em *much ado about nothing*. Há muito que se pode aprender do mesmo, do ponto de vista analítico. Ele sempre nos relembra a necessidade de estabelecer *a solid dynamic framework*, e o reconhecimento de restrições dinâmicas que apresentam dificuldades estruturais.

¹⁰ Essa é uma expressão coloquial utilizada pelos enxadristas para caracterizar o jogo e sua história. Para muitos o xadrez é considerado uma combinação de arte, ciência e jogo. A dominância de um desses três aspectos é motivo de polêmica.

Conclusões

O tema desse ensaio é o da fascinação dos economistas com o modelo de von Neumann, que trata da possibilidade de expansão uniforme de uma economia que produz n bens utilizando m atividades ($m > n$). O modelo é linear, mas as restrições são formadas por desigualdades, o que levou von Neumann a dar um tratamento sofisticado ao problema de crescimento equilibrado. Ele faz uso de uma generalização do teorema de *Brouwer* para provar a existência e unicidade da solução. A introdução de um instrumental poderoso (teorema de *Brouwer*) na análise econômica e seu sucesso em formalizar um problema teórico central é um marco na história das idéias econômicas. Naturalmente muitos avanços foram realizados na última metade do século XX para contornar algumas limitações da abordagem e certamente novos progressos são esperados no decorrer do novo milênio.

Como Kaldor costumava argumentar, a justificativa decisiva da pesquisa científica, tanto no campo natural como no campo social, é ampliar nossos horizontes e nosso poder sobre o ambiente. Adições ao conhecimento são úteis, mesmo se elas não têm qualquer aplicação imediata – desde que sejam capazes de permitir a construção de “modelos” melhores que salientem aspectos críticos do *modus operandi*. Por outro lado, von Hayek considerava provavelmente verdadeiro que a análise econômica nunca foi o produto de desprendida curiosidade intelectual sobre o porquê do fenômeno social, mas um desejo intenso de reconstruir um mundo afogado na insatisfação.

As reflexões e conjecturas expostas ao longo do nosso trabalho sugerem que não se deve ter aspirações exageradas sobre qualquer modelo. Todos apresentam limitações e não se pode perder de vista o objetivo do modelo proposto, inclusive ideologias embutidas. Depois de apresentarmos uma sinopse histórica do modelo de von Neumann e uma formulação matemática do mesmo, além de extensões, introduzimos uma ilustração numérica, extremamente simplificada, para familiarizar o leitor com algumas características do modelo. Em seguida, partimos para algumas conjecturas e comentários metodológicos sobre tal modelo, salientando a analogia da “miniciência”, cujo conteúdo é o jogo de xadrez e o problema da construção de uma teoria sólida. Se nossa argumentação é válida, então devemos envidar esforços para evitar amarras que nos afastem da possibilidade de construir modelos que melhor nos permitam compreender para transformar o mundo real.

Como sabemos, longe de serem lineares ou cartesianos, os caminhos das idéias econômicas são demarcados por armadilhas e obstáculos. São vias freqüentemente sinuosas e que requerem, para serem vencidas, equipamento poderoso e sensibilidade. Von Neumann nos forneceu um notável instrumento matemático e inspirou um avanço destacado na forma como tratamos a Economia Matemática. Seu modelo de crescimento econômico, do ponto de vista estritamente analítico e matemático, é uma “jóia de primeira água”, como diriam os enxadristas. Contudo, sua formulação repousa, essencialmente, no conceito de estrutura dinâmica invariante, o que não é o caso do mundo que nos cerca. É de se esperar que novas gerações de economistas sejam capazes de desenvolver novos métodos e instrumentos matemáticos que possibilitem tratar como processo único as principais mudanças e reestruturação nos modos de produção e distribuição existentes. É óbvio que von Neumann é uma referência destacada nesse processo, apesar de seu modelo original congelar, em maior escala, a estrutura técnico e socioeconômica do crescimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALDERSTON, J. (1954), Models of General Economic Equilibrium. In: *Economic Analysis*, ed. Morgenstern, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- BAUER, L. (1974), Consumption in von Neumann Matrix Models. In: *Mathematical Models in Economics*, ed. J. Lős and M. Lős, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- BIDARD, C. (1991), *Prix, Reproduction, Rareté*. Paris: Dunod.
- CHAKRAVARTY, S. (1969), *Capital and Development Planning*. Cambridge, Mass: The M. I. T. Press
- CHAMPERNOWNE, D. (1945), A Note On J. von Neumann's Article on A Model of Economic Equilibrium. *Review of Economic Studies*, 13.
- DOMAR, E. (1946), Capital Expansion, Rate of Growth and Employment. *Econometrika*, April.
- DORFMAN, R. SAMUELSON, P. and SOLOW, R. (1958), *Linear Programming and Economic Analysis*. London: McGraw – Hill
- GALE, D. (1956), The Closed Linear Model of Production. In: *Linear Inequalities and Related Systems*, ed. H. Kuhn and A. Tucker, Princeton: Princeton University Press.
- GEORGE, A. (1988), *Mathematical Modelling for Economists*. London: Macmillan Education LTD.
- GILISBERT, G. (1998). Circular Flow. In: *The Elgar Companion to Classical Economics*, eds. H. Kurz and N. Salvadori, vol. H – K, Cheltenham: Edward Edgar Publishing, Inc.
- HARROD, R. (1939) An essay in Dynamic Theory. *Economic Journal*, 49.
- HOLLIS, M. and NELL, E. (1977), *O Homem Econômico Racional*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.
- JONES, G. (1979), *Modernas Teorias do Crescimento Econômico*. São Paulo: Editora Atlas S. A.
- KALDOR, N. (1955), Alternative Theories of Distribution. *Review of Economic Studies*, 23.
- KARLIN, S. (1959), *Mathematical Methods and the Theory in Games, Programming and Economics*. Reading, Mass.: Addison - Wesley.
- KEMENY, J., MORGENSTERN, O. and THOMPSON, G. (1956), A Generalization of von Neumann's Model of an Expanding Economy. *Econometrika*, 24.
- KURZ, H. and SALVADORI, N. (1997), Von Neumann's Growth Model and the 'Classical' Tradition. In: *Issues in Modern Political Economy*, ed. J. Teixeira. Brasília: University of Brasilia.
- LANCASTER, K. (1968) *Mathematical Economics*. New York: the Macmillan Company.
- LEONTIEF, W (1951), *The Structure of the American Economy, 1919-1939*. New York: Oxford University Press.

- LOMBARDINI, S. and NÍCOLA, P. (1974) Income Distribution and Economic Development in Ricardian and Walrasian Models. In: *Proceedings of II Polish – Italian Conference on Applications of Systems Theory to Economy Management and Technology*. Pugnochio: Il Mulino.
- LÖS, J. (1974), The Existence of Equilibrium in an Open Expanding Economy Model (Generalization of Morgenstern - Thompson Model). In: *Mathematical Models in Economics*, ed. J. and M. Lös. Amsterdam: North - Holland Publishing Co.
- MATHUR, G. (1965), *Planning for Steady Growth*. London: Oxford University Press.
- MOESCHLIN, O. (1974), A Generalization of the Open Expanding Economy Model. *Econometrica*, 45.
- MORGENSTERN, O.(1974) General Discussion on Past and Future of the Von Neumann Model. In: *Mathematical Models in Economics*, eds., J. and Lös. Amsterdam: North – Holland publishing Co.
- MORGENSTERN, O. and THOMPSON, G. (1969), *An Open Expanding Economy Model*. Naval Research Logistics Quarterly, 16.
- MORGENSTERN, O. and THOMPSON, G. (1976), *Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economies*. Boston: Heath – Lexington
- MORISHIMA, M. (1973), *Marx's Economics. A Dual Theory of Value and Growth*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MURAKANI, Y., TOKOYAMA, K. and TSUKUI, Y. (1970), Efficient Paths of Accumulation and the Turnpike of the Japanese Economy, In: *Applications of Input – Output Analysis*, eds. A. Carter and A. Brödy. Amsterdam: North – Holland Publisher.
- NICOLA, P. (1976), *Lezioni di Dinamica Economica*. Bologna: Il Mulino.
- NICOLA, P. (1987), II Modello di von Neumann e la Teoria del Valore. In: *Aspetti Controversi Della Teoria del Valore*, ed. L. Pasinetti. Bologna: Il Mulino.
- PASINETTI, L. (1962), Rate of Profit and Income Distribution in Relation to the Rate of Economic Growth. *Review of Economic Studies*, 29.
- PASINETTI, L. (1993), *Structural Economic Dynamics. A Theory of the Economic Consequences of Human Learning*". Cambridge: Cambridge University Press.
- PIAGET, J. (1967), *Biologie at Connaissance*. Paris: Galimard.
- ROBINSON, J. (1978), *Contributions to Modern Economics*. Oxford: Basil Blackwell Publisher Ltd.
- ROMER, P. (1995), Comment on T. N. Srinivasan's Paper. In: *Growth Theories in the Light of the East Asian Experience*, ed. I. Takatoshi and Krueger, A. Chicago: University of Chicago Press.
- SAMUELSON, P. and MODIGLIANI, F. (1966), The Pasinetti Paradox in Neoclassical and More General Model's. *The Review of Economic Studies*, 33.

SCHEFOLD, B. (1988), The Dominant Technique in Joint Production Systems. *Cambridge Journal of Economics*, 12.

SCHEFOLD, B. (1998), Piero Sraffa. In: *Italian Economists of the 20th Century*, ed. F. Meacci. Cheltenham: Edward Elgar Publishing Limited.

SRAFFA, P. (1960), *Production of Commodities by Means of Commodities*. Cambridge: Cambridge University Press.

TEIXEIRA, J. (1980), The Optimal Rate of Growth, Stability and Turnpikes Theorems. *Anais, II Encontro Brasileiro de Econometria*. Nova Friburgo – RJ: Edição SBE.

TEIXEIRA, J. (2000), O Modelo de von Neumann e a Fascinação com a Teoria do Crescimento Equilibrado. *Revista de Economia Contemporânea*, v. 4 (n.2), janeiro-junho.

THOMPSON, G. (1987), von Neumann (1903 - 1957). In: *the New Palgrave - A Dictionary of Economics*, ed. J. Eatwell, M. Milgate and P Neuman, vol. 4. London: The Maxmillan Press Limited.

VON NEUMANN, J. (1945), A model of General Equilibrium. *Review of Economic Studies*, 13.